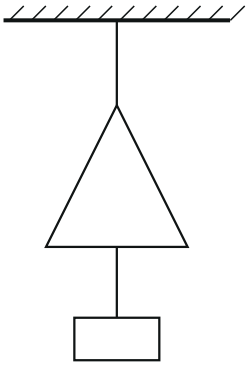
Два груза на нитях в воде

Задача 1. [Физтех 2006/07, 11 класс, задача 1] Два груза висят на нитях в воздухе. Сила натяжения верхней нити в два раза больше силы натяжения нижней нити. Когда оба груза полностью погрузили в воду, то их взаимное положение не изменилось и сила натяжения верхней нити уменьшилась на 20%, а нижней — на 30%. Найдите плотности нижнего и верхнего грузов. Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие связанных тел и закон Архимеда. Каждый груз покоится, значит, сумма сил на него равна нулю — и в воздухе, и в воде. В воздухе отношение натяжений даёт отношение масс; в воде к каждому грузу добавляется выталкивающая сила, которая пропорциональна объёму груза, — по уменьшению натяжений найдём объёмы, а затем плотности. Архимедовой силой воздуха пренебрегаем: воздух в тысячу раз легче воды.

Обозначения. m_1, V_1 — масса и объём верхнего груза (треугольник), m_2, V_2 — нижнего (прямоугольник); T_1, T_2 — натяжения верхней и нижней нитей в воздухе, T_1', T_2' — в воде; ось y — вертикально вверх.

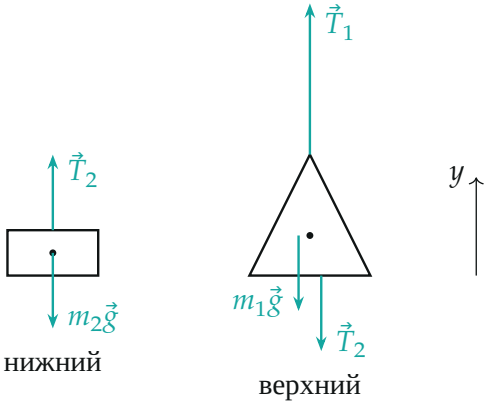


Рис. 1. Силы на грузы в воздухе. Нижняя нить тянет верхний груз вниз с той же силой T_2, с какой держит нижний груз (нить невесома).

1. Грузы в воздухе. Второй закон Ньютона в проекции на ось y для нижнего груза и для верхнего:

$$T_2 - m_2 g = 0, \qquad T_1 - m_1 g - T_2 = 0.$$

Отсюда $T_1 = (m_1 + m_2)g$, $T_2 = m_2 g$. Условие $T_1 = 2T_2$ даёт $m_1 + m_2 = 2m_2$:

$$m_1 = m_2 \equiv m, \qquad T_2 = mg, \qquad T_1 = 2mg.$$

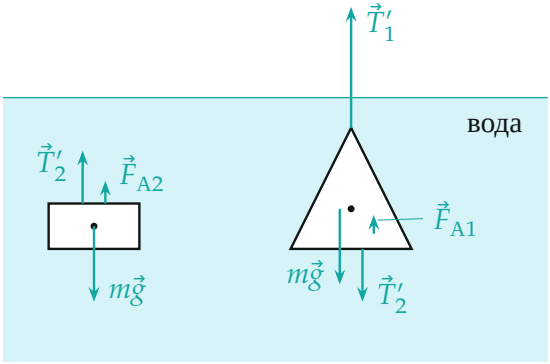


Рис. 2. Силы на грузы в воде: добавились выталкивающие силы $F_{A1} = \rho g V_1$, $F_{A2} = \rho g V_2$ (длины стрелок — по найденным ниже значениям).

2. Нижний груз в воде. Закон Архимеда: на полностью погружённый груз действует выталкивающая сила $F_{A2} = \rho g V_2$. Второй закон Ньютона в проекции на y и условие «натяжение уменьшилось на 30%», $T_2' = 0{,}7T_2 = 0{,}7mg$:

$$T_2' + \rho g V_2 - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho g V_2 = mg - 0{,}7mg = 0{,}3\,mg.$$

Плотность нижнего груза

$$\rho_2 = \frac{m}{V_2} = \frac{\rho}{0{,}3} = \frac{10}{3}\rho \approx 3{,}3 \text{ г/см}^3.$$

3. Верхний груз в воде. На него действуют T_1' вверх, $\rho g V_1$ вверх, mg и T_2' вниз; $T_1' = 0{,}8T_1 = 1{,}6\,mg$:

$$T_1' + \rho g V_1 - mg - T_2' = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho g V_1 = mg + 0{,}7mg - 1{,}6mg = 0{,}1\,mg,$$

$$\rho_1 = \frac{m}{V_1} = \frac{\rho}{0{,}1} = 10\rho = 10 \text{ г/см}^3.$$

Второй способ — через систему двух грузов: на неё действуют только T_1', тяжесть $2mg$ и две архимедовы силы, $T_1' = 2mg - \rho g(V_1 + V_2)$. Уменьшение натяжения верхней нити равно полной архимедовой силе: $0{,}4\,mg = \rho g(V_1 + V_2)$, а нижней — силе на нижний груз: $0{,}3\,mg = \rho g V_2$. Разность $0{,}1\,mg = \rho g V_1$ — то же.

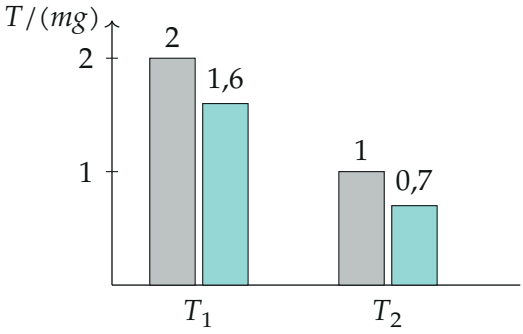


Рис. 3. Натяжения нитей в воздухе (серые) и в воде (бирюзовые) в единицах

mg. Разность для нижней нити $0{,}3$ — архимедова сила нижнего груза, для верхней $0{,}4$ — сумма архимедовых сил обоих.

Обратите внимание. Верхняя нить держит оба груза, поэтому её натяжение уменьшилось на сумму двух архимедовых сил, а не на силу, действующую только на верхний груз. Отсюда и «странный» результат: верхний груз, у которого натяжение упало меньше в процентах, оказался гораздо плотнее.

Ответ.

$$\rho_{\text{н}} = \frac{\rho}{0{,}3} \approx 3{,}3 \text{ г/см}^3, \qquad \rho_{\text{в}} = 10\rho = 10 \text{ г/см}^3$$

Проверка. Оба груза плотнее воды ($\rho_1, \rho_2 > \rho$) — иначе нижняя нить в воде провисла бы, а положение грузов по условию не изменилось. Подстановка: $V_1 = 0{,}1m/\rho$, $V_2 = 0{,}3m/\rho$; верхняя нить в воде $2mg - 0{,}4mg = 1{,}6mg$ — это 80% от $2mg$, нижняя $mg - 0{,}3mg = 0{,}7mg$ — 70% от mg, как в условии.

Смысл: потеря натяжения нити равна суммарной архимедовой силе на всё, что висит ниже точки подвеса этой нити.

Ответ. Плотность нижнего груза $\rho/0{,}3 \approx 3{,}3$ г/см^3, верхнего — $10\rho = 10$ г/см^3.