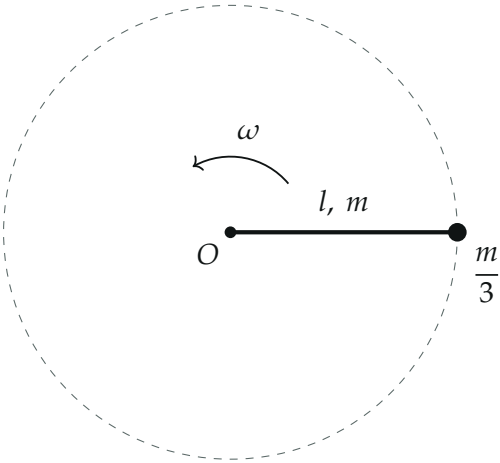
Канат с грузом на вращающемся столе

Задача 2. [Физтех 2006/07, 11 класс, задача 2] Однородный канат длиной l и массой m с прикреплённым к одному концу грузом массой $m/3$ находятся на гладкой горизонтальной поверхности стола и вращаются с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через другой конец каната. Размер груза мал по сравнению с длиной каната.

1. Найдите силу, действующую на груз со стороны каната.
2. Найдите силу натяжения каната на расстоянии $l/3$ от оси вращения.



Поясняющий рисунок (вид сверху): канат l, m вращается вокруг оси O, на конце — груз $m/3$.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на динамику движения по окружности тела с распределённой массой. Каждая точка каната и груз равномерно движутся по окружностям, их ускорение — центростремительное, $\omega^2 r$, к оси. Стол гладкий, его реакция вертикальна и уравновешивает тяжесть, поэтому в горизонтальной плоскости на груз действует только канат, а на кусок каната — только соседние части каната. Натяжение каната растёт к оси: ближний к оси участок должен разгонять «по кругу» всё, что лежит дальше от оси.

Обозначения. r — расстояние от оси; $T(r)$ — натяжение каната на расстоянии r; ось x — вдоль каната от оси O к грузу; $\lambda = m/l$ — масса единицы длины каната.

Пункт 1.

1. Груз. На груз в горизонтальной плоскости действует только сила $\vec{F}$ со стороны каната, направленная вдоль каната к оси (рис. 1). Второй закон Ньютона для груза в проекции на ось x (ускорение $\omega^2 l$ направлено к оси, его проекция $-\omega^2 l$):

$$-F = -\frac{m}{3}\,\omega^2 l \quad \Rightarrow \quad F = \frac{m\omega^2 l}{3}.$$

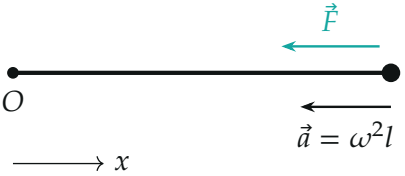


Рис. 1. Груз: сила $\vec{F}$ со стороны каната и центростремительное ускорение направлены к оси.

Пункт 2.

2. Кусок каната от r до конца. Выделим часть каната от точки на расстоянии r до груза вместе с грузом (рис. 2). На неё в горизонтальной плоскости действует одна внешняя сила — натяжение $T(r)$ со стороны внутренней части каната, к оси. Второй закон Ньютона для этой системы: сила равна сумме масс её частей, умноженных на их ускорения. Элемент каната длиной dx на расстоянии x имеет массу $\lambda\,dx$ и ускорение $\omega^2 x$:

$$T(r) = \frac{m}{3}\,\omega^2 l + \int_r^l \lambda\omega^2 x\,dx = \frac{m\omega^2 l}{3} + \frac{m\omega^2}{2l}\left(l^2 - r^2\right).$$

Без интеграла: масса куска $\lambda(l-r)$, его центр масс — посередине, на расстоянии $\dfrac{l+r}{2}$; ускорение центра масс $\omega^2\dfrac{l+r}{2}$, и $\lambda(l-r)\,\omega^2\dfrac{l+r}{2} =$

$\dfrac{m\omega^2}{2l}(l^2 - r^2)$ — то же.

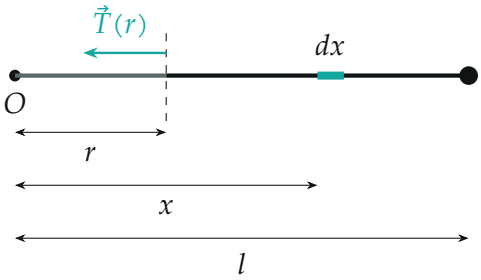


Рис. 2. Выделенная часть каната (чёрная) с грузом: внешняя горизонтальная сила одна — натяжение $T(r)$ в месте разреза; элемент dx на расстоянии x движется с ускорением $\omega^2 x$.

3. Значение при $r = l/3$.

$$T\left(\frac{l}{3}\right) = m\omega^2 l\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{9}\right) = m\omega^2 l\left(\frac{3}{9} + \frac{4}{9}\right) = \frac{7}{9}\,m\omega^2 l.$$

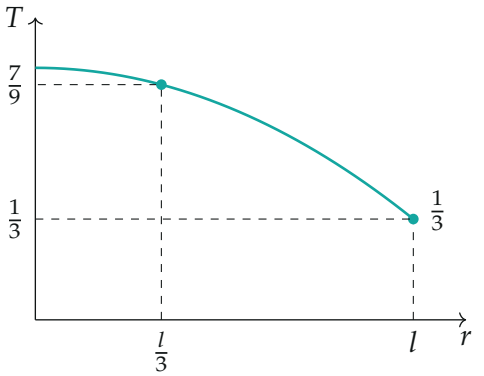


Рис. 3. Натяжение каната (в единицах $m\omega^2 l$) вдоль каната, построено по формуле шага 2: у оси $\frac{5}{6}$, у груза $\frac{1}{3}$, при $r = \frac{l}{3}$ — $\frac{7}{9}$.

Обратите внимание. Нельзя считать натяжение как «масса участка × ускорение точки разреза»: разные части каната движутся с разными

ускорениями. Нужна сумма $\sum m_i\omega^2 x_i$, то есть масса участка на ускорение его центра масс.

Ответ.

$$F = \frac{m\omega^2 l}{3}, \qquad T\left(\frac{l}{3}\right) = \frac{7}{9}\,m\omega^2 l$$

Проверка. Размерность $m\omega^2 l$ — кг·с$^{-2}$·м = Н. При $r = l$ формула шага 2 даёт $T = \frac{1}{3}m\omega^2 l = F$ — натяжение у груза равно силе, действующей на груз. Численно (python, сумма по 10^5 кусочкам) $T(l/3) = 0{,}7778\,m\omega^2 l$ — совпало с $7/9$.

Смысл: натяжение каната в точке — это «центростремительная сила», которую эта точка передаёт всему, что вращается дальше от оси.

Ответ. 1) $F = \dfrac{m\omega^2 l}{3}$, направлена вдоль каната к оси; 2) $T = \dfrac{7}{9}\,m\omega^2 l$.