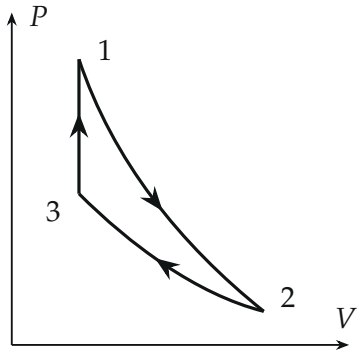
Цикл с адиабатой, изотермой и изохорой

Задача 3. [Физтех 2006/07, 11 класс, задача 3] Тепловая машина работает по замкнутому циклу, состоящему из процесса адиабатического расширения 1–2, изотермического процесса 2–3, и изохорического процесса 3–1. Рабочее вещество — ν молей идеального одноатомного газа. В процессе, где тепло к газу подводится, давление газа увеличивается в $\alpha = 3$ раза. В процессе сжатия от газа отводится количество теплоты Q ($Q > 0$). Во всём цикле 1–2–3–1 машина совершает работу A. Найдите максимальную температуру газа в цикле.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на первый закон термодинамики для циклического процесса. За цикл газ возвращается в исходное состояние, поэтому работа цикла равна полученному теплу минус отданное. Тепло подводится только на одном участке — изохоре 3–1 (адиабата без теплообмена, на изотерме сжатия тепло отводится). Тепло на изохоре выражается через температуры её концов, а их отношение задано: давление при постоянном объёме растёт в α раз, значит, и температура тоже.

Обозначения. T_1, T_2, T_3 — температуры в точках 1, 2, 3; Q_+ — тепло, полученное газом за цикл; R — газовая постоянная; Q_{ij} — тепло, полученное газом на участке i–j.

1. Знаки теплоты на участках.

- 1–2, адиабата: $Q_{12} = 0$ по определению; газ расширяется и совершает работу за счёт внутренней энергии, поэтому охлаждается: $T_2 < T_1$.
- 2–3, изотерма: $T_3 = T_2$, внутренняя энергия не меняется; объём уменьшается, работа газа отрицательна, поэтому по первому закону $Q_{23} = A_{23} < 0$ — это и есть отданное тепло, $Q_{23} = -Q$.
- 3–1, изохора: работа ноль, давление растёт в α раз. По уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \nu RT$ при $V = \text{const}$ температура растёт во столько же раз: $T_1 = \alpha T_3$. Здесь $Q_{31} > 0$ — единственный участок, где тепло подводится.

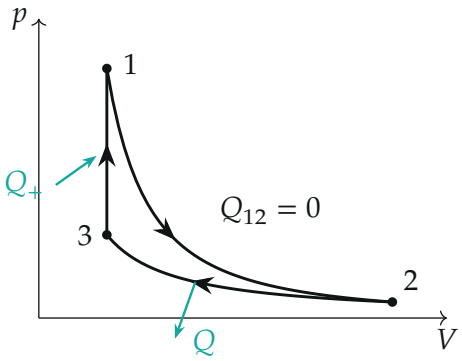


Рис. 1. Цикл в масштабе (построен по $pV^{5/3} = \text{const}$ на 1–2 и $pV = \text{const}$ на 2–3 для $\alpha = 3$): тепло Q_+ входит на изохоре 3–1, тепло Q уходит на изотерме 2–3.

2. Максимальная температура. На адиабате расширения температура падает от T_1 до T_2, на изотерме она постоянна, на изохоре 3–1 растёт от $T_3 = T_2$ до T_1. Значит, наибольшая температура — T_1.

3. Тепло на изохоре. Первый закон термодинамики для участка 3–1, $Q_{31} = \Delta U_{31} + A_{31}$, работа ноль, внутренняя энергия одноатомного газа $U = \frac{3}{2}\nu RT$:

$$Q_+ = Q_{31} = \frac{3}{2}\nu R\,(T_1 - T_3) = \frac{3}{2}\nu RT_1\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right).$$

4. Первый закон за цикл. Внутренняя энергия за цикл не меняется, поэтому работа цикла $A = Q_+ - Q$ (рис. 2), $Q_+ = A + Q$:

$$\frac{3}{2}\nu R T_1 \frac{\alpha - 1}{\alpha} = A + Q \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{2\alpha\,(A+Q)}{3(\alpha-1)\,\nu R}.$$

При $\alpha = 3$: $\dfrac{2\cdot 3}{3\cdot 2} = 1$, и

$$T_{\max} = T_1 = \frac{A+Q}{\nu R}.$$

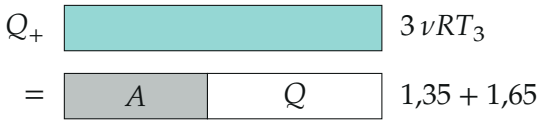


Рис. 2. Баланс энергии за цикл: полученное тепло Q_+ идёт на работу A и отданное тепло Q (числа — для $\alpha = 3$ в единицах $\nu R T_3$).

5. Второй способ — через одно Q. На изотерме 2–3 отданное тепло равно работе внешних сил: $Q = \nu R T_3 \ln \dfrac{V_2}{V_1}$. Уравнение адиабаты одноатомного газа $TV^{2/3} = \text{const}$ на участке 1–2: $T_1 V_1^{2/3} = T_3 V_2^{2/3}$, откуда $\dfrac{V_2}{V_1} = \alpha^{3/2}$. Тогда $Q = \frac{3}{2}\nu R T_3 \ln\alpha$ и

$$T_1 = \alpha T_3 = \frac{2\alpha Q}{3\nu R \ln\alpha} = \frac{2Q}{\nu R \ln 3} \approx 1{,}82\,\frac{Q}{\nu R}.$$

Отсюда видно, что A и Q в условии не независимы: $Q_+ = 3\nu R T_3$, $Q = \frac{3}{2}\ln 3\,\nu R T_3 \approx 1{,}65\,\nu R T_3$, $A = Q_+ - Q \approx 1{,}35\,\nu R T_3$, то есть $A = \left(\dfrac{2}{\ln 3} - 1\right) Q \approx 0{,}82\,Q$. Обе формулы дают одно и то же T_1 (python: 3,000 и 3,000 в единицах T_3).

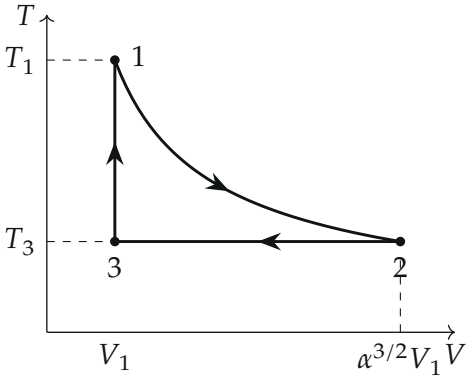


Рис. 3. Тот же цикл в осях T–V: самая горячая точка — 1, в конце изохорного нагрева.

Обратите внимание. Тепло на изохоре считается через $\frac{3}{2}\nu R\Delta T$, а не через работу: на изохоре работы нет. И «давление увеличивается в α раз» относится к изохоре 3–1 — именно там газ получает тепло.

Ответ.

$$\boxed{T_{\max} = T_1 = \frac{2\alpha\,(A+Q)}{3(\alpha-1)\nu R} = \frac{A+Q}{\nu R}}$$

Проверка. Размерность: $\left[\dfrac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{Дж}/(\text{моль}\cdot\text{К})}\right] = \text{К}$. Знак: $A+Q = Q_+ > 0$, температура положительна. При $\alpha \to 1$ изохорный нагрев исчезает, $Q_+ \to 0$, и та же сумма $A+Q$ требовала бы бесконечной T_1 — формула это показывает. Второй способ через Q и уравнения адиабаты и изотермы дал то же значение.

Смысл: всё тепло, которое машина берёт, приходит на изохоре; оно равно $A+Q$ и при $\alpha = 3$ ровно $\nu R T_1$.

Ответ. $T_{\max} = T_1 = \dfrac{A+Q}{\nu R}$ (в общем виде $\dfrac{2\alpha(A+Q)}{3(\alpha-1)\nu R}$; через одно Q: $\dfrac{2Q}{\nu R \ln 3}$).