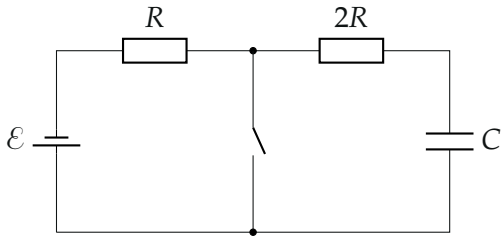
Периодическое замыкание ключа в цепи с конденсатором

Задача 4. [Физтех 2006/07, 11 класс, задача 4] В схеме, изображённой на рисунке, периодически (с периодом 3τ) повторяют следующий процесс: ключ замыкают на время τ и размыкают на время 2τ, причём время τ достаточно мало и напряжение на конденсаторе за это время изменяется незначительно. Через достаточно большое число повторений напряжение на конденсаторе становится практически постоянным, совершая лишь незначительные колебания около своего среднего значения.

1. Найдите это среднее значение.
2. Найдите среднюю тепловую мощность, выделяющуюся в резисторе $2R$ в установившемся режиме.

Все элементы можно считать идеальными, их параметры указаны на рисунке.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на квазистационарную цепь с конденсатором и ключом. Напряжение U на конденсаторе почти постоянно, поэтому на каждом из двух этапов токи в цепи постоянны и считаются по законам Ома и Кирхгофа, как будто вместо конденсатора стоит источник с ЭДС U. В установившемся режиме заряд конденсатора за период не меняется: сколько заряда пришло при разомкнутом ключе, столько ушло при замкнутом. Это условие и даёт U.

Обозначения. U — среднее напряжение на конденсаторе (верхняя обкладка плюс), $I_\text{р}$ — ток через $2R$ при разомкнутом ключе (заряжает

конденсатор), $I_з$ — ток через $2R$ при замкнутом ключе (разряжает), P — средняя мощность в $2R$.

Пункт 1.

1. Ключ разомкнут (время 2τ). Цепь — один контур: источник, R, $2R$ и конденсатор последовательно (рис. 1, слева). Закон Ома для замкнутой цепи с «источником» U, включённым навстречу:

$$I_р = \frac{\mathcal{E} - U}{R + 2R} = \frac{\mathcal{E} - U}{3R}.$$

Ток заряжает конденсатор, за время 2τ заряд растёт на $\Delta q_р = I_р \cdot 2\tau$.

2. Ключ замкнут (время τ). Ключ соединяет среднюю точку с нижним проводом, цепь распадается на два независимых контура (рис. 1, справа): источник замкнут через R, а конденсатор разряжается через $2R$ и ключ. Закон Ома для контура «конденсатор — $2R$ — ключ»:

$$I_з = \frac{U}{2R}, \qquad \Delta q_з = I_з\,\tau.$$

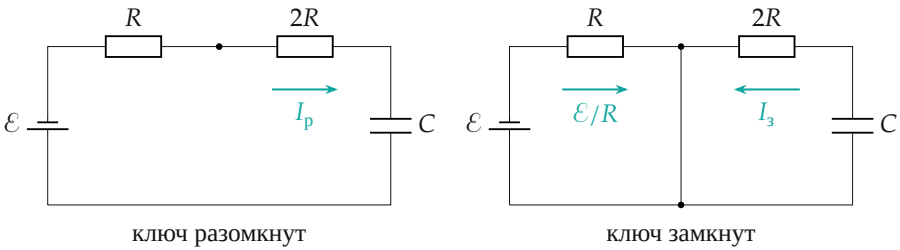


Рис. 1. Две схемы этапов. Слева — один контур, конденсатор заряжается током $I_р$; справа — два независимых контура, конденсатор разряжается через $2R$ током $I_з$.

3. Баланс заряда за период. В установившемся режиме заряд конденсатора к концу периода тот же, что в начале: $\Delta q_р = \Delta q_з$,

$$\frac{\mathcal{E} - U}{3R} \cdot 2\tau = \frac{U}{2R}\,\tau \quad \Rightarrow \quad 4\,(\mathcal{E} - U) = 3U \quad \Rightarrow \quad U = \frac{4}{7}\,\mathcal{E}.$$

Если бы U было меньше, заряд за период прибавлялся бы и U росло; если больше — убывало. Поэтому к этому значению напряжение и приходит.

Пункт 2.

4. Токи через $2R$**.** Подставим U:

$$I_{\text{р}} = \frac{\mathcal{E} - \frac{4}{7}\mathcal{E}}{3R} = \frac{\mathcal{E}}{7R}, \qquad I_{\text{з}} = \frac{\frac{4}{7}\mathcal{E}}{2R} = \frac{2\mathcal{E}}{7R}.$$

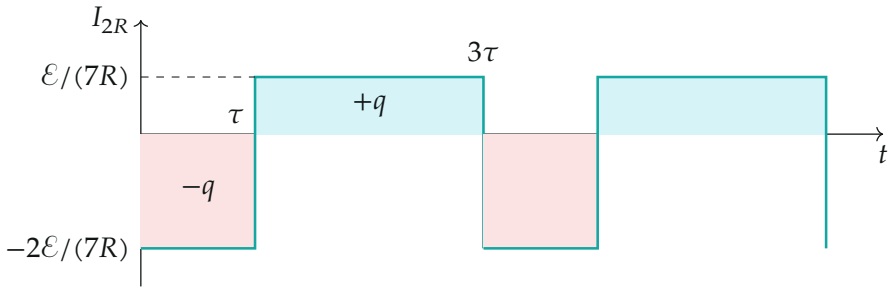


Рис. 2. Ток через резистор $2R$ *(положительный — заряжает конденсатор):* $\frac{2\mathcal{E}}{7R}$ *в течение* τ *против* $\frac{\mathcal{E}}{7R}$ *в течение* 2τ*. Площади над осью и под осью равны — это и есть баланс заряда.*

5. Средняя мощность. Закон Джоуля — Ленца: теплота в $2R$ за период

$$W = I_{\text{з}}^2 \cdot 2R \cdot \tau + I_{\text{р}}^2 \cdot 2R \cdot 2\tau = 2R\tau \frac{\mathcal{E}^2}{49R^2}(4+2) = \frac{12\,\mathcal{E}^2\tau}{49R},$$

средняя мощность — теплота за период, делённая на период 3τ:

$$P = \frac{W}{3\tau} = \frac{4\,\mathcal{E}^2}{49R}.$$

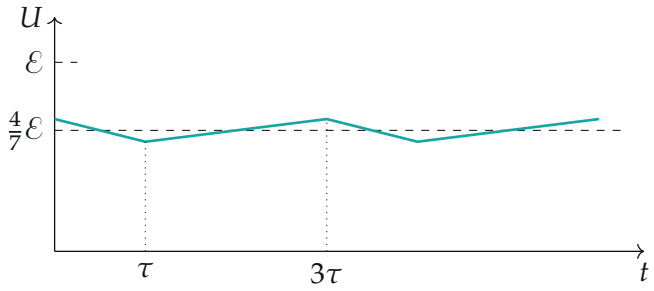


Рис. 3. Напряжение на конденсаторе в установившемся режиме: за время τ слегка падает (разряд через $2R$), за 2τ слегка растёт (заряд от источника); размах колебаний на рисунке сильно преувеличен.

Обратите внимание. Среднюю мощность нельзя считать по среднему току: средний ток через $2R$ за период равен нулю (заряд конденсатора не меняется), а теплота — нет. Усреднять нужно I^2. И ток $\mathcal{E}/R$ через источник и ключ при замкнутом ключе в $2R$ не идёт.

Ответ.

$$U = \frac{4}{7}\,\mathcal{E}, \qquad P = \frac{4\,\mathcal{E}^2}{49R}$$

Проверка. Размерности: U — вольты, $\mathcal{E}^2/R$ — ватты. Предел: если бы ключ всё время был разомкнут, конденсатор зарядился бы до $\mathcal{E}$; если бы всё время замкнут — разрядился бы до нуля; $\frac{4}{7}\mathcal{E}$ лежит между ними. Численное моделирование цепи (python, шаг $\tau/50$, $RC = 50\tau$) дало $U \approx 0{,}57\,\mathcal{E}$ и $P \approx 0{,}0813\,\mathcal{E}^2/R$ при $\frac{4}{49} = 0{,}0816$ — совпало с точностью малых колебаний.

Смысл: конденсатор устанавливается на таком напряжении, при котором он «впитывает» за 2τ ровно столько заряда, сколько отдаёт за τ.

Ответ. 1) $U = \frac{4}{7}\,\mathcal{E}$; 2) $P = \frac{4\,\mathcal{E}^2}{49R}$.