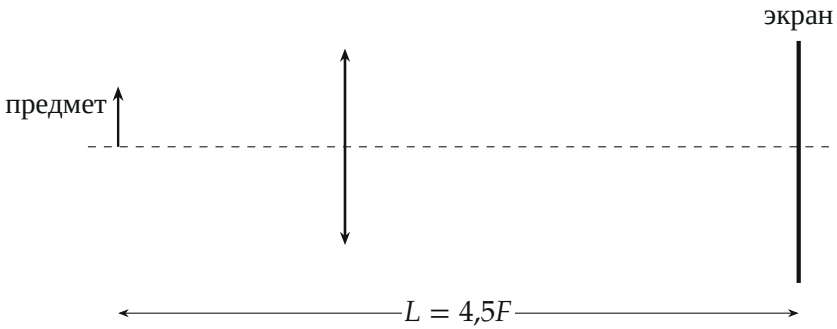
Увеличенное изображение при заданном расстоянии предмет-экран

Задача 5. [Физтех 2006/07, 11 класс, задача 5] С помощью тонкой линзы на экране получено увеличенное изображение предмета, расположенного перпендикулярно главной оптической оси линзы. Расстояние между предметом и экраном в 4,5 раза больше фокусного расстояния линзы. С каким увеличением изображается предмет?



Поясняющий рисунок: предмет, собирающая линза и экран; расстояние от предмета до экрана $L = 4{,}5F$.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на формулу тонкой линзы. Изображение получено на экране, значит, оно действительное, а линза собирающая: и предмет, и изображение — по разные стороны от линзы на положительных расстояниях. Сумма этих расстояний задана. Формула линзы и сумма дают два уравнения на два неизвестных расстояния; решений два (линзу можно поставить в двух местах), и условие «увеличенное» выбирает одно.

Обозначения. F — фокусное расстояние, d — расстояние от предмета до линзы, f — от линзы до экрана, $L = d + f = 4{,}5F$, Г — линейное увеличение.

1. Система уравнений. Формула тонкой собирающей линзы для действительного изображения и условие на расстояние:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \qquad d + f = L.$$

Из первого $\dfrac{d+f}{df} = \dfrac{1}{F}$, то есть $df = FL$. Значит, d и f — корни квадратного уравнения (теорема Виета)

$$x^2 - Lx + FL = 0, \qquad x = \frac{L \pm \sqrt{L^2 - 4FL}}{2}.$$

2. Числа. При $L = 4{,}5F$: $\sqrt{L^2 - 4FL} = F\sqrt{20{,}25 - 18} = 1{,}5F$, корни

$$x_1 = \frac{4{,}5F + 1{,}5F}{2} = 3F, \qquad x_2 = \frac{4{,}5F - 1{,}5F}{2} = 1{,}5F.$$

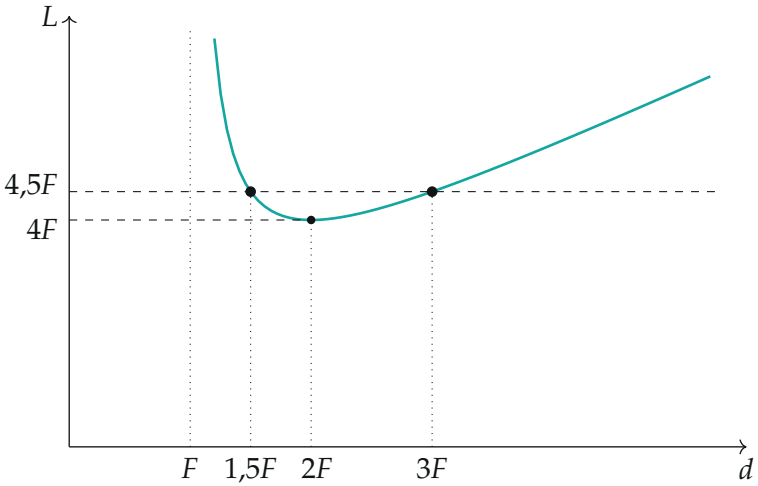


Рис. 1. Расстояние «предмет — изображение» $L = \dfrac{d^2}{d-F}$ в зависимости от положения предмета (построено по формуле линзы). Наименьшее $L = 4F$ при $d = 2F$; прямая $L = 4{,}5F$ пересекает кривую дважды: $d = 1{,}5F$ и $d = 3F$.

3. Выбор корня. Увеличение тонкой линзы $\Gamma = \dfrac{f}{d}$ (из подобия треугольников, образованных лучом через оптический центр). Изображение увеличенное, $\Gamma > 1$, значит, $f > d$: предмет ближе к линзе, $d = 1{,}5F$, $f = 3F$, и

$$\Gamma = \frac{f}{d} = \frac{3F}{1{,}5F} = 2.$$

Второе положение линзы ($d = 3F, f = 1{,}5F$) дало бы уменьшенное в 2 раза изображение — оно не подходит.

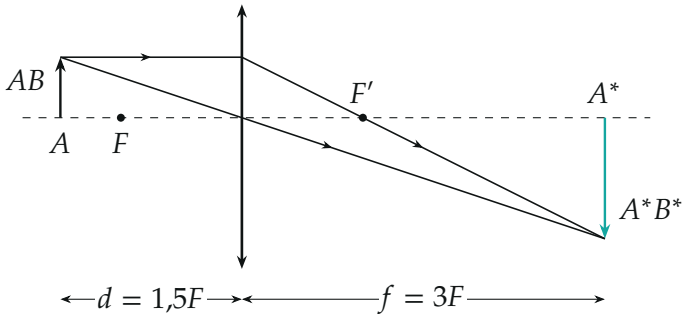


Рис. 2. Построение изображения при $d = 1{,}5F$ (масштаб соблюдён): луч, параллельный оси, после линзы идёт через фокус F', луч через центр не преломляется. Изображение A^*B^* действительное, перевёрнутое, вдвое больше предмета.

4. Второй способ — через увеличение. Подставим $f = \Gamma d$ в формулу линзы: $\dfrac{1}{d}\left(1 + \dfrac{1}{\Gamma}\right) = \dfrac{1}{F}$, $d = F\dfrac{\Gamma + 1}{\Gamma}$, $f = F(\Gamma + 1)$, и

$$L = d + f = F\frac{(\Gamma + 1)^2}{\Gamma} = 4{,}5F \quad \Rightarrow \quad 2\Gamma^2 - 5\Gamma + 2 = 0,$$

$$\Gamma = 2 \text{ или } \Gamma = \frac{1}{2}.$$

Увеличенному изображению отвечает $\Gamma = 2$ — то же.

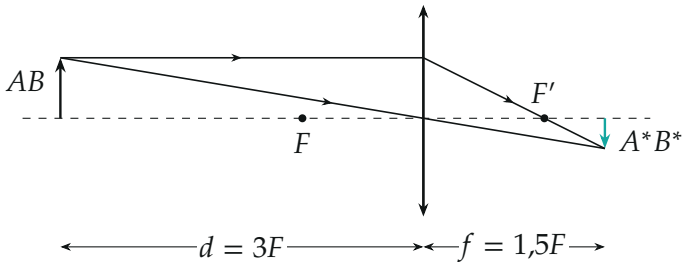


Рис. 3. Второе положение линзы при тех же предмете и экране: d и f поменялись местами, изображение уменьшено вдвое — по условию не подходит.

Обратите внимание. Расстояние «предмет — экран» при действительном изображении не может быть меньше $4F$ (рис. 1); при $L > 4F$ всегда есть два положения линзы, и увеличения в них взаимно обратны. Поэтому слово «увеличенное» в условии — не украшение, а выбор корня.

Ответ.

$$\boxed{\Gamma = \frac{L + \sqrt{L^2 - 4FL}}{L - \sqrt{L^2 - 4FL}} = 2}$$

Проверка. Подстановка: $\dfrac{1}{1{,}5F} + \dfrac{1}{3F} = \dfrac{2+1}{3F} = \dfrac{1}{F}$, $1{,}5F + 3F = 4{,}5F$ — оба уравнения выполнены. Увеличение безразмерно. В пределе $L \to 4F$ корень $\sqrt{L^2 - 4FL} \to 0$ и $\Gamma \to 1$ — предмет в $2F$, изображение в $2F$, в натуральную величину, как и должно быть.

Смысл: чем дальше экран от предмета (при заданной линзе), тем сильнее можно увеличить изображение; $4{,}5F$ хватает на двукратное.

Ответ. $\Gamma = 2$ (предмет на расстоянии $1{,}5F$ от линзы, экран — на $3F$).