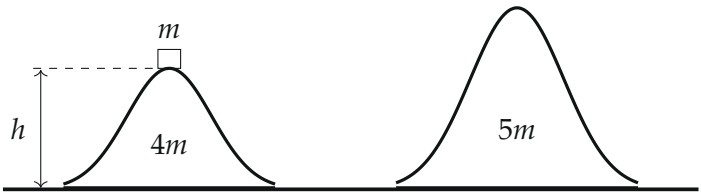
Монета на подвижных горках

Задача 1. [Физтех 2007/08, 11 класс, задача 1] На гладкой горизонтальной поверхности стола покоятся незакреплённые горки массами $4m$ и $5m$. На вершине горки массой $4m$ на высоте h лежит монета массой m. От незначительного толчка монета съезжает с горки в направлении другой горки.

1. Найдите скорость монеты на столе.
2. На какую максимальную высоту сможет подняться монета на горке массой $5m$?

Поверхности горок гладкие. Горки имеют плавный переход к поверхности стола. Монета не отрывается от поверхности горок, а поступательно движущиеся горки — от стола. Направления всех движений находятся в одной вертикальной плоскости.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Задача на законы сохранения в системе тел, движущихся без трения. Пока монета скользит по горке, горка толкает её (и сама получает толчок назад): внешние силы — тяжести и реакции стола — вертикальны, поэтому сохраняется горизонтальная проекция импульса системы «монета + горка», а трения нет — сохраняется механическая энергия. Съезжая с первой горки, монета отдаёт часть энергии горке $4m$. На второй горке в верхней точке подъёма монета неподвижна *относительно горки* — они движутся с общей горизонтальной скоростью, и часть кинетической энергии остаётся у системы.

Обозначения. Ось x — горизонтально, от первой горки ко второй. v — скорость монеты на столе, u — скорость горки $4m$ в этот момент, w — общая скорость монеты и горки $5m$ в момент наибольшего подъёма, H — наибольшая высота.

Пункт 1.

1. Закон сохранения импульса для системы «монета + горка $4m$» в проекции на ось x. Сначала всё покоится; когда монета съехала на стол (рис. 1):

$$0 = mv_x + 4m\,u_x \quad \Rightarrow \quad u_x = -\frac{v_x}{4}.$$

Горка отъезжает назад со скоростью в четыре раза меньше, чем у монеты.

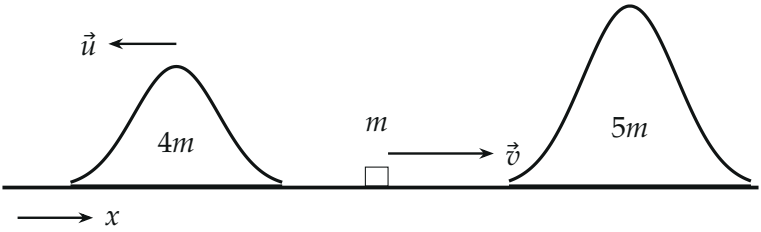


Рис. 1. Монета съехала на стол: она движется ко второй горке, первая горка — в обратную сторону.

2. Закон сохранения механической энергии для той же системы. Трения нет, стол горку не толкает по горизонтали и работы над ней не совершает (реакция стола перпендикулярна перемещению):

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{4m\,u^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{4m}{2}\cdot\frac{v^2}{16} = \frac{mv^2}{2}\cdot\frac{5}{4}.$$

Отсюда

$$v = \sqrt{\frac{8}{5}gh}.$$

Пункт 2.

3. Наибольшая высота на второй горке. Монета въезжает на горку $5m$ и толкает её вперёд. В верхней точке подъёма вертикальная скорость монеты равна нулю, а горизонтальная совпадает со скоростью горки — иначе монета ещё поднималась бы или уже съезжала (рис. 2). Закон сохранения импульса системы «монета + горка $5m$» в проекции на x:

$$mv = (m + 5m)\,w \quad \Rightarrow \quad w = \frac{v}{6}.$$

Закон сохранения энергии этой системы (отсчёт высоты от стола):

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{6m\,w^2}{2} + mgH = \frac{mv^2}{12} + mgH,$$

$$H = \frac{v^2}{2g}\left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{12}\cdot\frac{v^2}{g} = \frac{5}{12}\cdot\frac{8}{5}h = \frac{2}{3}h.$$

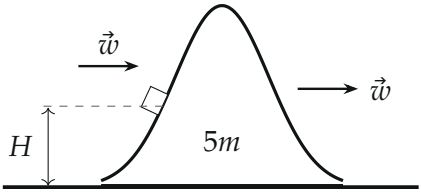


Рис. 2. Наибольший подъём: монета и горка $5m$ движутся вместе со скоростью $\vec{w}$.

4. Куда делась энергия (рис. 3). Из mgh (примем за 15 частей) горке $4m$ досталась $\frac{1}{5}$ — 3 части, монете 12 частей. На второй горке в момент наибольшего подъёма кинетическая энергия общего движения $\frac{1}{6}$ от 12 — 2 части, на высоту остаётся 10 частей: $H = \frac{10}{15}h = \frac{2}{3}h$.

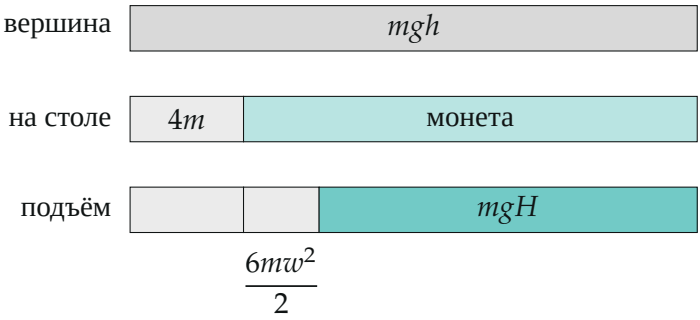


Рис. 3. Энергия системы в трёх положениях монеты (15 равных частей): на высоту H уходит 10 частей из 15.

Обратите внимание. В верхней точке подъёма монета не останавливается относительно стола: она движется вместе с горкой. Если приравнять $\frac{mv^2}{2} = mgH$, получится $H = \frac{4}{5}h$ — это ответ для закреплённой горки.

Ответ.

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{m}{4m}}} = \sqrt{\frac{8}{5}gh}; \qquad H = \frac{5m}{6m}\cdot\frac{v^2}{2g} = \frac{2}{3}h$$

Проверка. Размерность: $\sqrt{gh}$ — м/с, H — в долях h. Пределы: если бы горки были бесконечно тяжёлыми (закреплёнными), получилось бы $v = \sqrt{2gh}$ и $H = h$ — монета поднялась бы на ту же высоту; у нас обе потери уменьшают высоту. Высота $\frac{2}{3}h$ меньше высоты второй горки (она выше первой на рисунке), так что монета через вершину не перевалит.

Смысл: подвижные горки забирают у монеты часть энергии — первая при спуске, вторая при подъёме.

Ответ. 1) $v = \sqrt{\frac{8}{5}gh}$; 2) $H = \frac{2}{3}h$.