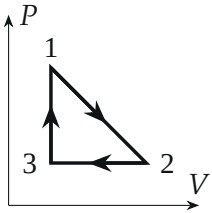
Цикл гелия с линейным участком

Задача 2. [Физтех 2007/08, 11 класс, задача 2] С газообразным гелием проводится циклический процесс, состоящий из процесса 1–2 с линейной зависимостью давления от объёма, изобарического сжатия 2–3 и изохорического нагревания 3–1. Известно, что температуры в состояниях 1 и 2 равны, а объём в состоянии 2 в три раза больше, чем в состоянии 1. Найдите отношение работы газа в цикле 1–2–3–1 к количеству теплоты, подведённой к газу в изохорическом процессе 3–1.



▲ **Решение. Что происходит.** Задача на первое начало термодинамики для цикла. Работа газа за цикл — площадь треугольника на диаграмме PV. Теплота на изохоре 3–1 — только изменение внутренней энергии (работы нет). Всё сводится к тому, чтобы выразить давления и объёмы вершин через одну пару P_0, V_0: равенство температур в 1 и 2 даёт отношение давлений.

Обозначения. V_0 — объём в состоянии 1, P_0 — давление в состоянии 2; ν — количество гелия, R — газовая постоянная. Гелий одноатомный: $U = \frac{3}{2}\nu RT = \frac{3}{2}PV$.

1. Параметры вершин. Уравнение Менделеева–Клапейрона $PV = \nu RT$, при $T_1 = T_2$: $P_1V_0 = P_0 \cdot 3V_0$, откуда $P_1 = 3P_0$. Состояние 3 лежит на изобаре 2–3 и на изохоре 3–1: $P_3 = P_0$, $V_3 = V_0$ (рис. 1).

$$1:\ (V_0,\ 3P_0), \qquad 2:\ (3V_0,\ P_0), \qquad 3:\ (V_0,\ P_0).$$

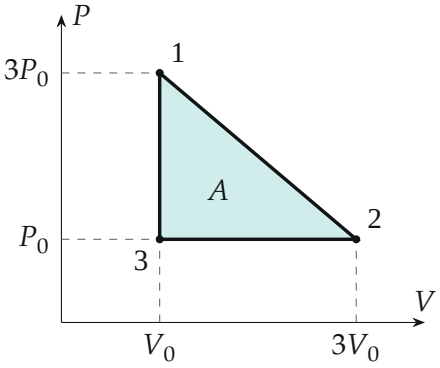


Рис. 1. Цикл в координатах: вершины $(V_0, 3P_0)$, $(3V_0, P_0)$, (V_0, P_0). Заливка — работа газа за цикл.

2. Работа за цикл. Цикл обходится по часовой стрелке, работа газа положительна и равна площади прямоугольного треугольника с катетами $3V_0 - V_0 = 2V_0$ и $3P_0 - P_0 = 2P_0$:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 2V_0 \cdot 2P_0 = 2P_0V_0.$$

По участкам: на 1–2 газ расширяется, работа — площадь трапеции под отрезком $\frac{3P_0+P_0}{2} \cdot 2V_0 = 4P_0V_0$; на 2–3 сжатие при P_0: $-P_0 \cdot 2V_0 = -2P_0V_0$; на 3–1 работы нет. Сумма $2P_0V_0$ — то же.

3. Теплота на изохоре 3–1. Первое начало термодинамики $Q = \Delta U + A$; на изохоре $A = 0$:

$$Q_{31} = \Delta U_{31} = \frac{3}{2}(P_1V_1 - P_3V_3) = \frac{3}{2}(3P_0V_0 - P_0V_0) = 3P_0V_0.$$

Газ нагревается ($T_1 = 3T_3$), теплота подводится.

4. Отношение.

$$\frac{A}{Q_{31}} = \frac{2P_0V_0}{3P_0V_0} = \frac{2}{3}.$$

5. Где газ горячее всего. На участке 1–2 температура не постоянна: изотерма через 1 и 2 — гипербола $PV = 3P_0V_0$, а прямая 1–2 лежит выше неё (рис. 2). Значит, по пути из 1 в 2 газ сначала нагревается, потом охлаждается; наибольшая температура — в середине отрезка,

$(2V_0, 2P_0)$: $PV = 4P_0V_0$. Для ответа это не нужно, но объясняет, почему в процессе 1–2 газ и получает, и отдаёт теплоту.

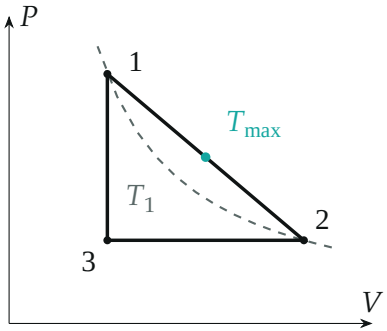


Рис. 2. Изотерма $T = T_1$ (пунктир) через точки 1 и 2, построена по точкам $PV = 3P_0V_0$. Прямая 1–2 лежит выше — там газ горячее.

6. Сравнение величин (рис. 3). В единицах P_0V_0: работа за цикл 2, теплота на изохоре 3.

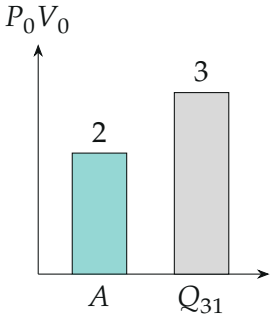


Рис. 3. Работа за цикл и теплота на изохоре 3–1 в единицах P_0V_0.

Обратите внимание. Теплота спрашивается не полная полученная за цикл, а только на изохоре 3–1. Брать ΔU надо по PV вершин, без знания ν и T: $\frac{3}{2}\nu R\Delta T = \frac{3}{2}\Delta(PV)$.

Ответ.

$$\frac{A}{Q_{31}} = \frac{\frac{1}{2}(3V_0 - V_0)(3P_0 - P_0)}{\frac{3}{2}(3P_0V_0 - P_0V_0)} = \frac{2}{3}$$

Проверка. Отношение безразмерно. Работа посчитана двумя способами (площадь треугольника и сумма по участкам). Обобщение: при $V_2 = kV_1$ получилось бы $\frac{A}{Q_{31}} = \frac{(k-1)^2/2}{\frac{3}{2}(k-1)} = \frac{k-1}{3}$; при $k \to 1$ цикл вырождается, и отношение стремится к нулю, как и должно.

Смысл: работа цикла — площадь треугольника, а теплота на изохоре определяется ростом PV от P_0V_0 до $3P_0V_0$.

Ответ. $\dfrac{A}{Q_{31}} = \dfrac{2}{3}$.