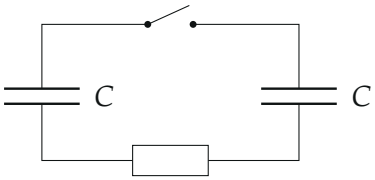
Тепло при перезарядке двух конденсаторов через резистор

Задача 3. [Физтех 2007/08, 11 класс, задача 3] В цепи, показанной на рисунке, ёмкость каждого конденсатора равна C. Левый конденсатор заряжен до напряжения U_0, правый — до напряжения $2U_0$. У обоих конденсаторов положительный заряд находится на верхней обкладке. Какое количество теплоты выделится в резисторе после замыкания ключа?



▲ **Решение. Что происходит.** Задача на перезарядку конденсаторов через резистор. Ключ соединяет верхние обкладки, резистор — нижние. Заряд перетекает, пока напряжения конденсаторов не сравняются, и ток прекращается. Сохраняется суммарный заряд верхних обкладок (они вместе с ключом изолированы от остальной цепи — закон сохранения заряда), а убыль энергии электрического поля конденсаторов выделяется теплотой в резисторе (закон сохранения энергии).

Обозначения. $q_1 = CU_0$, $q_2 = 2CU_0$ — начальные заряды верхних обкладок левого и правого конденсаторов; U — общее напряжение в конце, Q — теплота.

1. Куда идёт ток. Верхние обкладки после замыкания соединены проводником — их потенциалы равны. Напряжение на резисторе равно разности напряжений конденсаторов $2U_0 - U_0 = U_0$: ток через резистор идёт от нижней обкладки левого конденсатора к нижней обкладке правого, заряд переходит с правого конденсатора на левый (рис. 1).

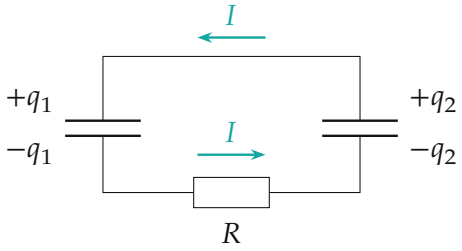


Рис. 1. Заряды обкладок в начале и направление тока: по верхнему проводу заряд идёт с правого конденсатора на левый.

2. Конечное состояние. Тока нет — напряжение на резисторе ноль, значит, напряжения конденсаторов равны: $U_л = U_п = U$. Заряд верхних обкладок сохраняется:

$$CU + CU = q_1 + q_2 = CU_0 + 2CU_0 \quad \Rightarrow \quad U = \frac{3}{2}U_0.$$

Каждый конденсатор в конце несёт заряд $\frac{3}{2}CU_0$ (рис. 2).

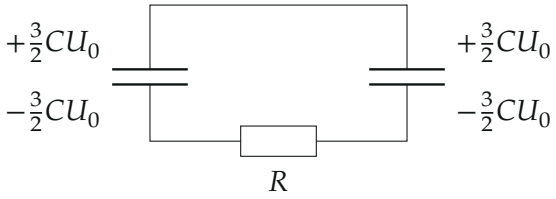


Рис. 2. Конечное состояние: заряды и напряжения конденсаторов одинаковы, $U = \frac{3}{2}U_0$, тока нет.

3. Теплота — убыль энергии конденсаторов. Источников нет, работа сторонних сил ноль:

$$W_{нач} = \frac{CU_0^2}{2} + \frac{C(2U_0)^2}{2} = \frac{5}{2}CU_0^2, \qquad W_{кон} = 2\cdot\frac{C}{2}\left(\frac{3}{2}U_0\right)^2 = \frac{9}{4}CU_0^2,$$

$$Q = W_{нач} - W_{кон} = \frac{10-9}{4}CU_0^2 = \frac{1}{4}CU_0^2.$$

4. Второй способ — эквивалентный конденсатор. Для тока в контуре два конденсатора соединены последовательно, ёмкость $\frac{C\cdot C}{2C} = \frac{C}{2}$, и

«заряжены» до разности напряжений U_0. Пока ток идёт, разность спадает до нуля (рис. 3), и вся энергия этого эквивалентного конденсатора уходит в теплоту:

$$Q = \frac{(C/2)\,U_0^2}{2} = \frac{1}{4}CU_0^2.$$

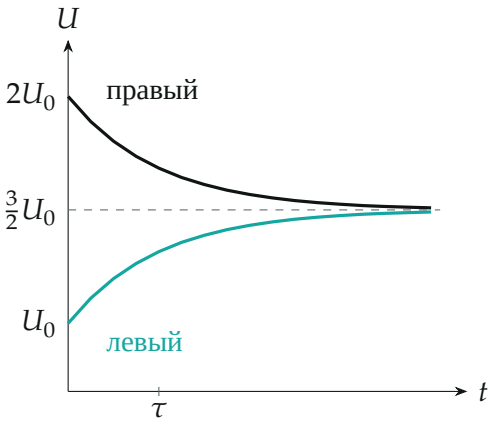


Рис. 3. Напряжения конденсаторов после замыкания ключа сходятся к $\frac{3}{2}U_0$; время установления $\tau = R \cdot \frac{C}{2}$.

Обратите внимание. Ответ не зависит от R: сопротивление определяет только, как быстро идёт перезарядка, а не сколько выделится теплоты.

Ответ.

$$\boxed{Q = \frac{1}{2} \cdot \frac{C}{2}\,(2U_0 - U_0)^2 = \frac{1}{4}CU_0^2}$$

Проверка. Размерность: $[CU^2] =$ Дж. Предел: если бы конденсаторы были заряжены одинаково, ток не пошёл бы, и по формуле $Q = \frac{C}{4}(U_0 - U_0)^2 = 0$ — верно. Два способа (шаги 3 и 4) совпали.

Смысл: в теплоту уходит только энергия «разности» зарядов, общая часть $\frac{3}{2}CU_0$ на каждом конденсаторе остаётся.

Ответ. $Q = \dfrac{CU_0^2}{4}$.