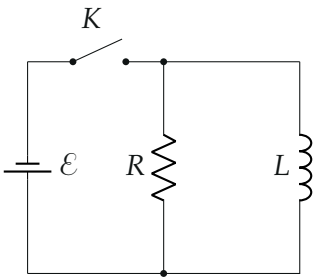
Катушка при размыкании ключа

Задача 4. [Физтех 2007/08, 11 класс, задача 4] В схеме, показанной на рисунке, все элементы можно считать идеальными. Параметры элементов указаны на рисунке. До замыкания ключа K ток в цепи отсутствовал. Ключ замыкают на некоторое время, а затем размыкают. Оказалось, что после размыкания ключа через катушку протёк заряд q_0.

1. Найдите ток через катушку сразу после размыкания ключа.
2. Какой заряд протёк через источник за время, пока ключ был замкнут?



▲ **Решение. Что происходит.** Задача на самоиндукцию. Источник идеальный, поэтому, пока ключ замкнут, напряжение на резисторе и на катушке (они параллельны источнику) равно $\mathcal{E}$: ток резистора постоянен, а ток катушки растёт линейно — катушка с постоянным напряжением «разгоняет» ток. После размыкания ток катушки не может исчезнуть скачком: он замыкается через резистор и затухает. Заряд, протёкший через катушку после размыкания, связан с начальным током простым соотношением — в этом ключ к задаче.

Обозначения. τ — время, пока ключ замкнут; I_1 — ток катушки в момент размыкания; I_L, I_R — токи катушки и резистора; q — заряд через источник.

Пункт 1.

1. После размыкания: контур «катушка + резистор». Ток катушки I_L идёт через резистор (рис. 1б). Второе правило Кирхгофа для контура:

ЭДС самоиндукции равна напряжению на резисторе,

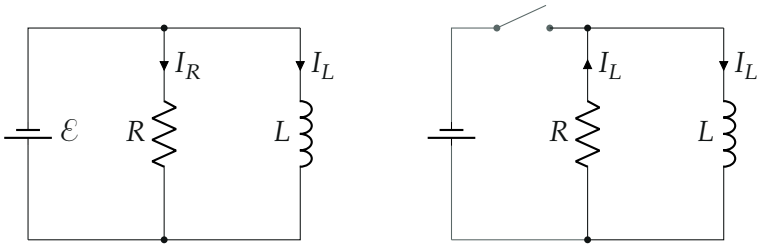
$$-L\frac{dI_L}{dt} = I_L R.$$

Умножим на dt и учтём, что $I_L\,dt = dq$ — заряд, протёкший через катушку за dt:

$$-L\,dI_L = R\,dq.$$

Просуммируем от момента размыкания (ток I_1) до конца (ток 0): $LI_1 = Rq_0$, откуда

$$I_1 = \frac{Rq_0}{L}.$$



а) ключ замкнут б) ключ разомкнут

Рис. 1. а) Пока ключ замкнут, R и L под напряжением $\mathcal{E}$; б) после размыкания ток катушки идёт через резистор вверх. Ветвь источника (серая) отключена.

Пункт 2.

2. Пока ключ замкнут: токи ветвей. Напряжение на резисторе и на катушке равно $\mathcal{E}$ (рис. 1а). Закон Ома для резистора:

$$I_R = \frac{\mathcal{E}}{R} = \text{const}.$$

Для катушки $L\frac{dI_L}{dt} = \mathcal{E}$, ток растёт с нуля линейно:

$$I_L = \frac{\mathcal{E}}{L}\,t, \qquad I_1 = \frac{\mathcal{E}\tau}{L} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{LI_1}{\mathcal{E}} = \frac{Rq_0}{\mathcal{E}}.$$

3. Заряд через источник. Ток источника $I = I_R + I_L$ (первое правило Кирхгофа для узла). Заряд — площадь под графиком тока за время τ (рис. 2): прямоугольник от I_R и треугольник от I_L,

$$q = I_R\tau + \frac{1}{2}I_1\tau = \frac{\mathcal{E}}{R}\cdot\frac{Rq_0}{\mathcal{E}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{Rq_0}{L}\cdot\frac{Rq_0}{\mathcal{E}} = q_0 + \frac{R^2q_0^2}{2L\mathcal{E}}.$$

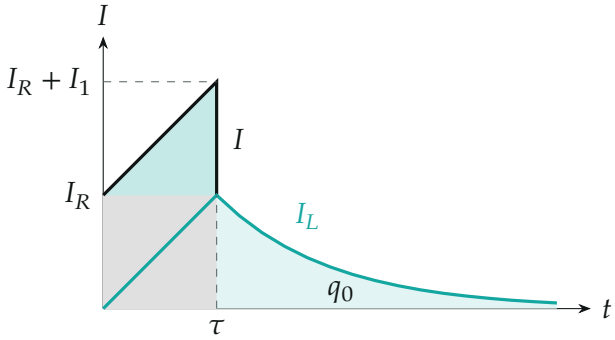


Рис. 2. Ток источника I (чёрный) и ток катушки I_L (бирюзовый). Пока ключ замкнут, заряд через источник — площадь под I: серый прямоугольник плюс бирюзовый треугольник. После размыкания площадь под I_L равна q_0. Построено при $\tau = L/R$.

4. Второй способ для I_1 — через закон затухания. После размыкания ток затухает экспоненциально, $I_L = I_1e^{-Rt/L}$; заряд $q_0 = \int_0^\infty I_1e^{-Rt/L}\,dt = I_1\frac{L}{R}$ — то же, что в шаге 1. Площадь под экспонентой равна площади прямоугольника высотой I_1 и шириной L/R.

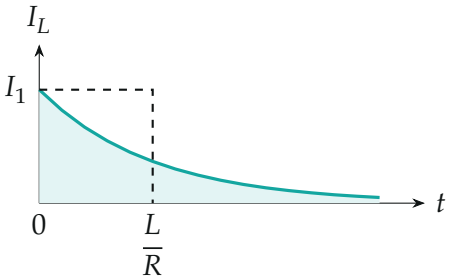


Рис. 3. Ток катушки после размыкания (время — от момента размыкания). Площадь под кривой (q_0) равна площади пунктирного прямоугольника $I_1 \cdot \frac{L}{R}$.

Обратите внимание. Через источник за время замыкания протёк не только ток катушки, но и постоянный ток резистора $\mathcal{E}/R$; забыв его, получим только второе слагаемое. Интересно, что вклад резистора равен ровно q_0.

Ответ.

$$\boxed{I_1 = \frac{Rq_0}{L}; \qquad q = \frac{\mathcal{E}}{R}\tau + \frac{\mathcal{E}\tau^2}{2L} = q_0 + \frac{R^2 q_0^2}{2L\mathcal{E}}, \quad \tau = \frac{Rq_0}{\mathcal{E}}}$$

Проверка. Размерность: $\frac{Rq}{L} = \frac{\text{Ом·Кл}}{\text{Гн}} = \frac{\text{В·с}}{\text{Гн}} = \text{А}$; $\frac{R^2q_0^2}{L\mathcal{E}} = \frac{Rq_0}{L} \cdot \frac{Rq_0}{\mathcal{E}} = \text{А·с} = \text{Кл}$. Предел: если ключ замкнуть на очень короткое время, $q_0 \to 0$, и $q \approx q_0$ — ток катушки не успел вырасти, через источник прошёл почти только ток резистора, а он за то же время равен q_0.

Смысл: катушка «помнит» ток в момент размыкания, а заряд после размыкания — это ток, умноженный на время затухания L/R.

Ответ. 1) $I_1 = \frac{Rq_0}{L}$; 2) $q = q_0 + \frac{R^2q_0^2}{2L\mathcal{E}}$.