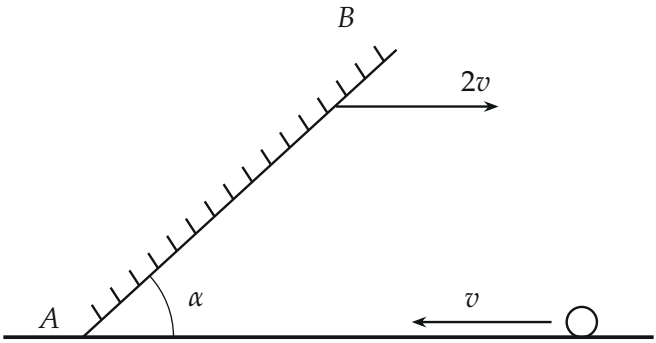
Шарик и движущееся плоское зеркало

Задача 5. [Физтех 2007/08, 11 класс, задача 5] По столу катится шарик со скоростью v. В противоположном направлении со скоростью $2v$ перемещают поступательно плоское зеркало AB. Поверхность зеркала составляет угол $\alpha = 60°$ с поверхностью стола. Скорости шарика и зеркала перпендикулярны ребру двугранного угла, образованного поверхностями зеркала и стола.

1. Найдите скорость шарика относительно зеркала и покажите её направление, нарисовав рисунок.
2. С какой скоростью (по модулю) относительно стола перемещается изображение шарика в зеркале?



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на сложение скоростей (переход в систему отсчёта зеркала) и на свойство плоского зеркала: изображение симметрично предмету относительно плоскости зеркала. В системе отсчёта, где зеркало покоится, правило простое: составляющая скорости вдоль зеркала у изображения та же, что у шарика, а составляющая поперёк зеркала — противоположная. Поэтому сначала переходим в систему зеркала, отражаем там скорость, потом возвращаемся к столу.

Обозначения. Ось x — вдоль стола в сторону движения зеркала (вправо), ось y — вверх. $\vec{v}_{\text{ш}}$ — скорость шарика относительно стола, $\vec{v}_{\text{з}}$ — скорость зеркала, $\vec{u}$ — скорость шарика относительно зеркала, $\vec{u}\,'$ — скорость изображения относительно зеркала, $\vec{w}$ — скорость изображения относительно стола. Проекции: $v_{\text{ш}x} = -v$, $v_{\text{з}x} = 2v$.

Пункт 1.

1. Закон сложения скоростей. Скорость шарика относительно стола равна сумме его скорости относительно зеркала и скорости самого зеркала (зеркало движется поступательно, поэтому скорость у всех его точек одна): $\vec{v}_{\text{ш}} = \vec{u} + \vec{v}_{\text{з}}$. Отсюда

$$\vec{u} = \vec{v}_{\text{ш}} - \vec{v}_{\text{з}}, \qquad u_x = -v - 2v = -3v, \qquad u_y = 0.$$

Шарик относительно зеркала движется со скоростью $u = 3v$ горизонтально, в сторону ребра A (против движения зеркала), то есть под углом $\alpha = 60^\circ$ к плоскости зеркала (рис. 1).

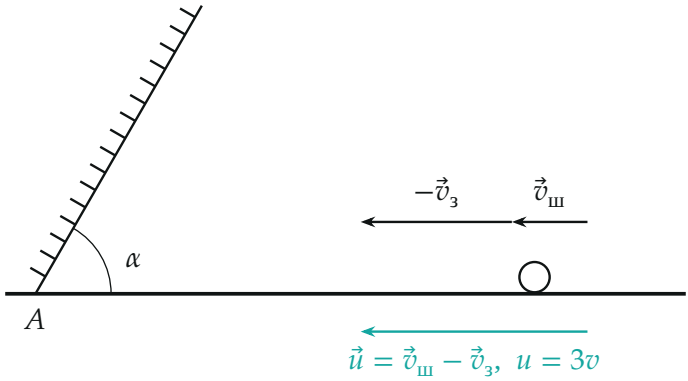


Рис. 1. Скорость шарика относительно зеркала: к $\vec{v}_{ш}$ (длина v) добавляем $-\vec{v}_{з}$ (длина $2v$); итог $\vec{u}$ — горизонтально к ребру A, $u = 3v$.

Пункт 2.

2. Скорость изображения в системе зеркала. В этой системе зеркало неподвижно, а изображение в каждый момент симметрично шарику относительно плоскости зеркала. Разложим $\vec{u}$ на составляющую вдоль зеркала $u_{\parallel}$ и поперёк него $u_{\perp}$ (рис. 2):

$$u_{\parallel} = u\cos\alpha = \frac{3v}{2}, \qquad u_{\perp} = u\sin\alpha = \frac{3\sqrt{3}\,v}{2}.$$

У изображения вдоль зеркала составляющая та же ($u'_{\parallel} = u_{\parallel}$, вниз вдоль зеркала к A), а поперёк — той же величины, но направлена в другую

сторону: шарик приближается к зеркалу, изображение тоже приближается к нему с другой стороны. Значит, $\vec{u}\,'$ — зеркальное отражение $\vec{u}$, $u' = u = 3v$.

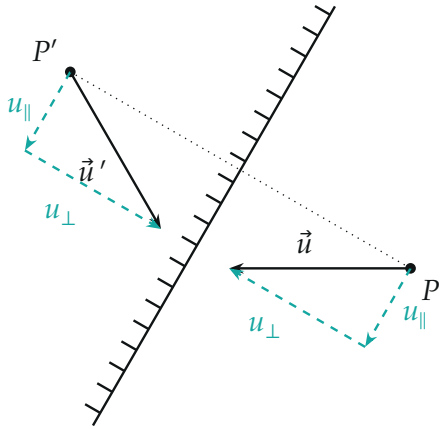


Рис. 2. Система отсчёта зеркала: шарик P и его изображение P' симметричны относительно зеркала. Составляющая $u_\parallel$ вдоль зеркала у изображения сохраняется, составляющая $u_\perp$ меняет знак: $\vec{u}\,'$ — отражение $\vec{u}$ в плоскости зеркала, $u' = 3v$.

3. Проекции $\vec{u}\,'$ на оси. Отражение относительно прямой, наклонённой под углом α к оси x, поворачивает горизонтальный вектор на угол 2α: $\vec{u}$ направлен под углом $180°$ к оси x, отражённый — под углом $2\alpha - 180° = -60°$. Поэтому

$$u'_x = u\cos 60° = \frac{3v}{2}, \qquad u'_y = -u\sin 60° = -\frac{3\sqrt{3}\,v}{2}.$$

Знак минус у u'_y: изображение (оно за зеркалом, выше стола) опускается к столу.

4. Возврат в систему стола. Закон сложения скоростей для изображения: $\vec{w} = \vec{u}\,' + \vec{v}_з$, в проекциях

$$w_x = \frac{3v}{2} + 2v = \frac{7v}{2}, \qquad w_y = -\frac{3\sqrt{3}\,v}{2},$$

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \frac{v}{2}\sqrt{49 + 27} = \frac{v}{2}\sqrt{76} = \sqrt{19}\,v \approx 4{,}36\,v.$$

Тот же модуль — по теореме косинусов для треугольника на рис. 3: угол между $\vec{u}\,'$ и $\vec{v}_з$ равен $60°$, $w^2 = (3v)^2 + (2v)^2 + 2 \cdot 3v \cdot 2v \cos 60° = 19v^2$.

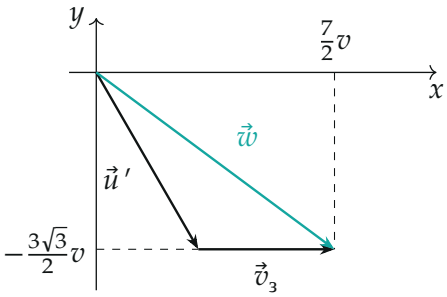


Рис. 3. Скорость изображения относительно стола: $\vec{w} = \vec{u}\,' + \vec{v}_з$, $w = \sqrt{19}\,v$.

5. Второй способ — через положения. Пусть в момент t ребро A находится в точке $x_A = 2vt$, шарик — в точке $x = x_0 - vt$ на столе, на расстоянии $s = x - x_A = x_0 - 3vt$ от ребра. Отражение в зеркале переводит луч стола (направление $0°$ из A) в луч под углом $2\alpha = 120°$: зеркало — биссектриса угла между ними. Изображение лежит на этом луче на том же расстоянии s от ребра:

$$x' = x_A + s\cos 120° = x_A - \frac{s}{2}, \qquad y' = s\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}\,s.$$

Производные по времени ($\dot{x}_A = 2v$, $\dot{s} = -3v$):

$$w_x = \dot{x}' = 2v + \frac{3v}{2} = \frac{7}{2}v, \qquad w_y = \dot{y}' = -\frac{3\sqrt{3}}{2}v$$

— то же, что в шаге 4. Положения шарика и изображения в три момента времени, вычисленные по этим формулам, — на рис. 4.

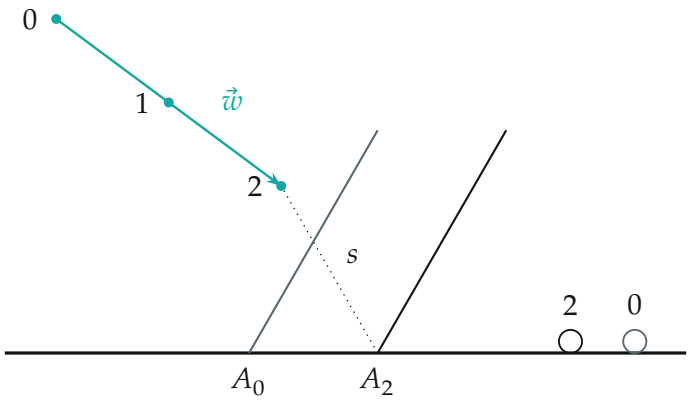


Рис. 4. Зеркало, шарик и его изображение (бирюзовые точки) в моменты 0, 1, 2 *через равные промежутки времени (зеркало и шарик показаны в моменты* 0 *— серым — и* 2*). Изображение идёт по прямой вправо и вниз со скоростью* $\sqrt{19}\,v$.

Обратите внимание. Привычное «изображение движется вдвое быстрее зеркала» верно только для движения зеркала по нормали к своей плоскости. Здесь зеркало наклонено, поэтому отражать нужно не скорость зеркала, а скорость шарика в системе зеркала, и лишь затем добавить $\vec{v}_з$.

Ответ. $\boxed{u = 3v}$ горизонтально к ребру A, под углом 60° к зеркалу; $\boxed{w = \sqrt{19}\,v \approx 4{,}4\,v}$.

Проверка. Размерность обоих ответов — скорость. Предельный случай: при $\alpha = 90°$ (вертикальное зеркало) отражение меняет знак горизонтальной скорости: $u'_x = 3v$, $w = 5v$; по формуле $w^2 = u^2 + v_з^2 + 2uv_з \cos(180° - 2\alpha)$ при $\alpha = 90°$ получаем $9 + 4 + 12 = 25$ — то же. При $\alpha = 60°$ выходит $9 + 4 + 6 = 19$.

Ответ. 1) $u = 3v$, горизонтально в сторону ребра A (против движения зеркала), под углом 60° к плоскости зеркала; 2) $w = \sqrt{19}\,v \approx 4{,}4\,v$.