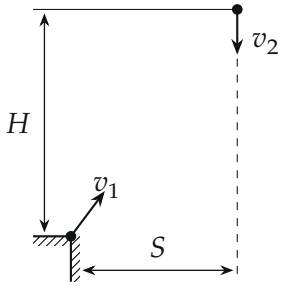
Столкновение двух комков глины в полёте

Задача 1. [Физтех 2008/09, 11 класс, задача 1] Два комка глины, отстоящих друг от друга по горизонтали на $S = 6$ м и по вертикали на $H = 10$ м, бросают одновременно со скоростями v_1 под некоторым углом к горизонту вверх и $v_2 = 2$ м/с вертикально вниз (см. рис.). Через время $t = 1$ с комки столкнулись. Найти v_1.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на движение тел, брошенных в поле тяжести. Оба комка падают с одним и тем же ускорением $\vec{g}$, поэтому друг относительно друга они движутся *равномерно и прямолинейно*. Удобно перейти в систему отсчёта, свободно падающую с ускорением $\vec{g}$: в ней оба комка летят по прямым с постоянными скоростями, и задача становится геометрической. Решим и так, и «в лоб» в координатах.

Обозначения. Начало координат — в точке бросания нижнего комка, ось x горизонтально к верхнему комку, ось y вертикально вверх; v_{1x}, v_{1y} — проекции начальной скорости нижнего комка; (S, y) — точка столкновения.

1. Уравнения движения. Закон движения тела с постоянным ускорением $\vec{g}$ в проекциях на оси x и y, для нижнего комка:

$$x_1 = v_{1x}t, \qquad y_1 = v_{1y}t - \frac{gt^2}{2},$$

для верхнего (начальные координаты (S, H), скорость v_2 вниз):

$$x_2 = S, \qquad y_2 = H - v_2 t - \frac{gt^2}{2}.$$

2. Условие встречи. В момент t координаты совпадают (рис. 1):

$$v_{1x}t = S, \qquad v_{1y}t - \frac{gt^2}{2} = H - v_2 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Слагаемое $\frac{gt^2}{2}$ сокращается — это и есть «падение вместе»:

$$v_{1x} = \frac{S}{t} = 6 \text{ м/с}, \qquad v_{1y} = \frac{H - v_2 t}{t} = 8 \text{ м/с}.$$

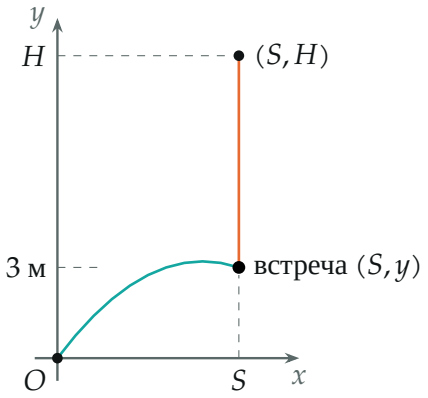


Рис. 1. Траектории в системе отсчёта Земли (по точкам, масштаб соблюдён): нижний комок летит по параболе, верхний — вертикально вниз; встреча через 1 с на высоте 3 м.

3. Модуль скорости. По теореме Пифагора для проекций (рис. 2):

$$v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} = \frac{1}{t}\sqrt{(H - v_2 t)^2 + S^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} \text{ м/с} = 10 \text{ м/с}.$$

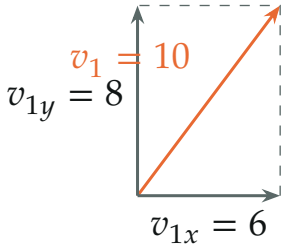


Рис. 2. Начальная скорость нижнего комка и её проекции (м/с): египетский треугольник 6–8–10.

4. Второй способ: падающая система отсчёта. Перейдём в систему отсчёта, которая в момент бросания покоится и падает с ускорением $\vec{g}$. В ней на комки не действует «сила тяжести»: верхний комок равномерно движется вниз со скоростью v_2 и за время t смещается на $v_2 t = 2$ м, нижний летит по прямой со скоростью v_1 (рис. 3). Встреча — в точке, куда сместился верхний комок: она на высоте $H - v_2 t = 8$ м над стартом нижнего и в $S = 6$ м по горизонтали. Путь нижнего комка — гипотенуза:

$$v_1 t = \sqrt{(H - v_2 t)^2 + S^2} = 10 \text{ м} \quad \Rightarrow \quad v_1 = 10 \text{ м/с}.$$

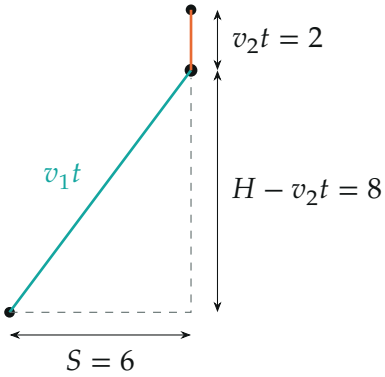


Рис. 3. В свободно падающей системе отсчёта оба комка движутся по прямым равномерно (длины в метрах): путь нижнего $v_1 t = 10$ м — гипотенуза треугольника 6–8–10.

Обратите внимание. Ускорение g в ответ не входит: оба комка падают одинаково, и на их взаимное положение тяжесть не влияет. Поэтому g и не дано.

Ответ.

$$\boxed{v_1 = \frac{1}{t}\sqrt{(H - v_2 t)^2 + S^2} = 10 \text{ м/с}}$$

Проверка. Размерность: м/с. Подстановка при $g = 10$ м/с^2: нижний комок через 1 с на высоте $8 - 5 = 3$ м, верхний — на $10 - 2 - 5 = 3$ м; по горизонтали оба на 6 м — встреча (рис. 1). Предел $v_2 = 0$: $v_1 = \frac{1}{t}\sqrt{H^2 + S^2}$ — нижний комок надо бросить прямо «в» верхний, известный результат задачи «стрелок и падающая мишень».

Смысл: в падающей системе отсчёта тяжести нет, и комки встречаются, как два равномерно движущихся тела; скорость нижнего — расстояние до точки встречи, делённое на время.

Ответ. $v_1 = \frac{1}{t}\sqrt{(H - v_2 t)^2 + S^2} = 10$ м/с.