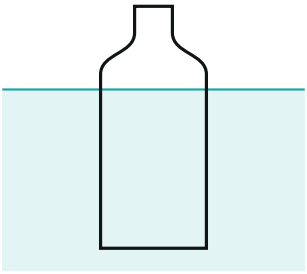
Пустая бутылка: сколько воды долить, чтобы утонула

Задача 2. [Физтех 2008/09, 11 класс, задача 2] Пустая стеклянная бутылка плавает в воде, погрузившись на $3/4$ своего объёма. Какой минимальный объём воды нужно долить в бутылку, чтобы она утонула? Плотность стекла $\rho_c = 2{,}5$ г/см^3, воды $\rho = 1$ г/см^3, вместимость бутылки $0{,}7$ литра.



Поясняющий рисунок: пустая бутылка плавает, под водой — $3/4$ её полного объёма.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Бутылка плавает, пока архимедова сила может уравновесить её вес. Самая большая архимедова сила — когда бутылка ушла под воду целиком. Доливая воду, мы увеличиваем вес, а предельная архимедова сила не меняется. Минимальный объём доливки — тот, при котором вес бутылки с водой сравнялся с архимедовой силой полностью погружённой бутылки. Класс задачи — условие плавания тел (закон Архимеда и равновесие сил), записанное дважды.

Обозначения. $V = 0{,}7$ л — вместимость (объём полости), V_c — объём стекла, V_x — объём долитой воды. Полный объём бутылки, вытесняющей воду при полном погружении, — $V_c + V$ (рис. 1).

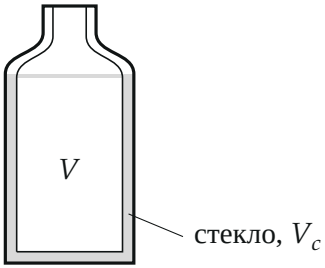


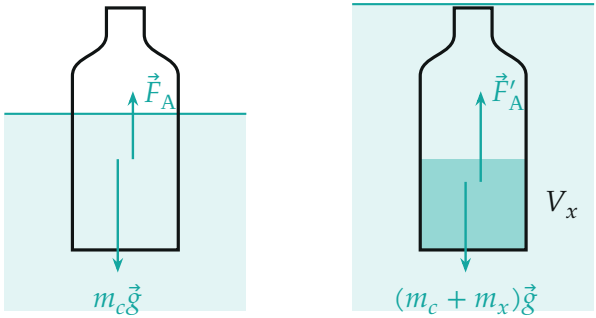
Рис. 1. Объёмы: полость V (белая) и стекло V_c (серое). Полностью погружённая бутылка вытесняет $V_c + V$.

1. Пустая бутылка: найдём объём стекла. Условие плавания (первый закон Ньютона для бутылки, силы — на рис. 2а): сила тяжести стекла уравновешена архимедовой силой, а под водой $\frac{3}{4}$ полного объёма $V_c + V$:

$$\rho_c V_c g = \rho g \cdot \frac{3}{4}(V_c + V).$$

Отсюда

$$V_c\left(\rho_c - \frac{3}{4}\rho\right) = \frac{3}{4}\rho V \quad \Rightarrow \quad V_c = \frac{3\rho V}{4\rho_c - 3\rho} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 0{,}7}{10 - 3}\ \text{л} = 0{,}3\ \text{л}.$$



а) пустая плавает б) на грани утопания

Рис. 2. Силы на бутылку: а) пустая, под водой 3/4 объёма; б) с долитой водой V_x вода дошла до горлышка.

2. Бутылка с водой на грани утопания. Бутылка утонет, если вес больше наибольшей архимедовой силы. Наибольшая — при полном погружении, $\rho g(V_c + V)$. Минимальная доливка V_x даёт равенство (рис. 2б):

$$(\rho_c V_c + \rho V_x)\, g = \rho g\,(V_c + V).$$

Отсюда

$$V_x = V + V_c - \frac{\rho_c}{\rho} V_c = 0{,}7 + 0{,}3 - 2{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}25\ \text{л}.$$

В общем виде, подставив V_c из шага 1:

$$V_x = V + V_c\,\frac{\rho - \rho_c}{\rho} = V\Big(1 - \frac{3(\rho_c - \rho)}{4\rho_c - 3\rho}\Big) = \frac{\rho_c}{4\rho_c - 3\rho}\,V.$$

Чуть больше V_x — и бутылка тонет; меньше — плавает, уйдя под воду не целиком.

3. Как растёт погружение при доливе. Пока бутылка плавает, погружённый объём $V_\text{п}$ находим из того же равновесия: $\rho V_\text{п} = \rho_c V_c + \rho V_x$, то есть $V_\text{п} = 0{,}75 + V_x$ (в литрах). Это прямая (рис. 3): при $V_x = 0$ — 0,75 л, а полный объём 1,0 л достигается при $V_x = 0{,}25$ л.

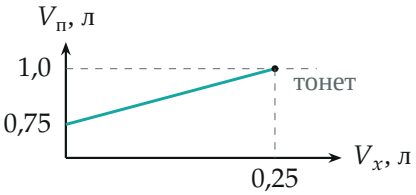


Рис. 3. Погружённый объём растёт с доливкой; на $V_x = 0{,}25$ л он сравнивается с полным объёмом бутылки $V_c + V$.

Обратите внимание. Вытесняет воду не только полость, но и само стекло: полный объём бутылки $V_c + V = 1{,}0$ л, а не 0,7 л. Если забыть V_c, получится неверный ответ.

Ответ.

$$\boxed{V_x = \frac{\rho_c}{4\rho_c - 3\rho}\,V = 0{,}25\text{ л} = 250\text{ мл}}$$

Проверка. Размерность: дробь плотностей безразмерна, $[V_x] =$ л. Предел: если бутылка изначально погружена целиком (вместо $\frac{3}{4}$ — единица), в формуле получилось бы $V_x = 0$ — доливать нечего. Числа: вес бутылки с водой $2{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}25 = 1{,}0$ кг равен массе воды объёмом 1,0 л — равенство выполняется.

Смысл: долитая вода должна «съесть» запас плавучести — ту четверть полного объёма $\frac{1}{4} \cdot 1{,}0$ л, что была над водой.

Ответ. $V_x = \dfrac{\rho_c}{4\rho_c - 3\rho}\,V = 250$ мл.