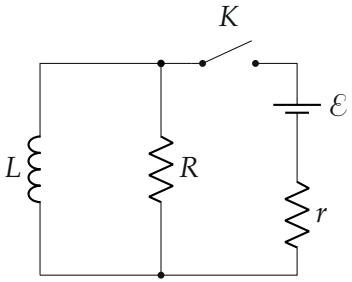
Катушка и резистор: ключ замыкают и размыкают

Задача 4. [Физтех 2008/09, 11 класс, задача 4] Электрическая цепь состоит из батарейки с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r, катушки индуктивностью L и резистора сопротивлением $R = 3r$. Ключ K замыкают, а затем размыкают в момент, когда напряжение на катушке достигает величины $\frac{2\mathcal{E}}{3}$.

1. Найдите напряжение на катушке сразу после замыкания ключа.
2. Какое количество теплоты выделится в цепи после размыкания ключа?



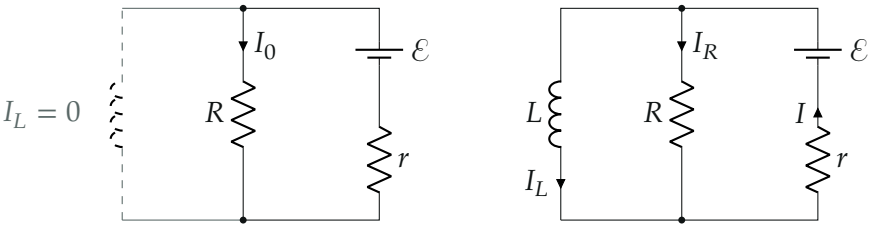
▲ **Решение. Что происходит.** Задача на самоиндукцию в цепи постоянного тока. Ток через катушку не может измениться скачком: ЭДС самоиндукции $-L\frac{dI}{dt}$ при скачке была бы бесконечной. Поэтому сразу после замыкания ток катушки равен нулю, и она как бы разорвана; а в момент размыкания ток катушки сохраняется и дальше идёт по контуру «катушка + резистор», пока энергия магнитного поля не перейдёт в теплоту.

Обозначения. I_L — ток катушки, I_R — ток резистора, I — ток источника, U — напряжение на катушке. Катушка и резистор соединены параллельно, поэтому напряжение на катушке всё время равно напряжению на резисторе: $U = I_R R$.

Пункт 1.

1. Сразу после замыкания. $I_L = 0$, ток идёт только по контуру «источник — r — R» (рис. 1а). Закон Ома для полной цепи:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R+r} = \frac{\mathcal{E}}{4r}, \qquad U_0 = I_0 R = \frac{3}{4}\mathcal{E}.$$



а) сразу после замыкания б) перед размыканием

Рис. 1. а) Ток катушки ещё ноль — её ветвь как разорвана; б) перед размыканием ток источника делится между R и катушкой. Ключ на рисунках замкнут и не показан.

Пункт 2.

2. Токи перед размыканием. Напряжение на катушке и на резисторе $U = \frac{2}{3}\mathcal{E}$ (рис. 1б). Закон Ома для резистора и для участка с источником:

$$I_R = \frac{U}{R} = \frac{2\mathcal{E}}{9r}, \qquad I = \frac{\mathcal{E}-U}{r} = \frac{\mathcal{E}}{3r}.$$

Первое правило Кирхгофа для верхнего узла:

$$I_L = I - I_R = \frac{3\mathcal{E}}{9r} - \frac{2\mathcal{E}}{9r} = \frac{\mathcal{E}}{9r}.$$

3. После размыкания. Источник отключён, ток I_L катушки в первый момент тот же и идёт теперь через резистор (рис. 2) — в обратном для резистора направлении. Ток убывает, энергия магнитного поля катушки $\frac{LI_L^2}{2}$ целиком переходит в теплоту в резисторе (закон сохранения энергии

для контура L–R, других потребителей и источников нет):

$$Q = \frac{LI_L^2}{2} = \frac{L}{2}\cdot\frac{\mathcal{E}^2}{81r^2} = \frac{L\mathcal{E}^2}{162\,r^2}.$$

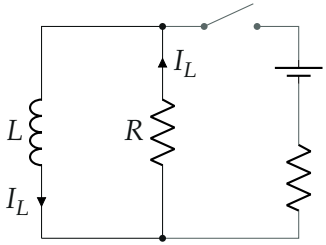


Рис. 2. После размыкания: ток катушки замыкается через резистор, ветвь с источником (серым) отключена.

4. Как меняется ток катушки. Для графика (рис. 3) решим уравнения в общем виде. Пока ключ замкнут, источник с r и резистор R по отношению к катушке эквивалентны источнику с ЭДС $\frac{R}{R+r}\mathcal{E} = \frac{3}{4}\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением $\frac{Rr}{R+r} = \frac{3}{4}r$; отсюда

$$U(t) = \frac{3}{4}\mathcal{E}\,e^{-3rt/(4L)}, \qquad I_L(t) = \frac{\mathcal{E}}{r}\Big(1 - e^{-3rt/(4L)}\Big).$$

Напряжение падает до $\frac{2}{3}\mathcal{E}$ при $t_1 = \frac{4L}{3r}\ln\frac{9}{8} \approx 0{,}157\,\frac{L}{r}$, и в этот момент $I_L = \frac{\mathcal{E}}{r}(1 - \frac{8}{9}) = \frac{\mathcal{E}}{9r}$ — то же, что в шаге 2. После размыкания ток убывает как $e^{-R(t-t_1)/L}$.

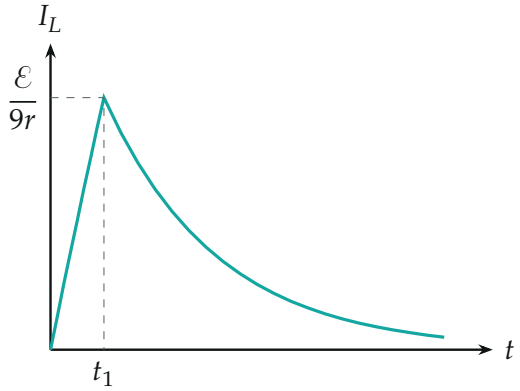


Рис. 3. Ток катушки: растёт, пока ключ замкнут, и после размыкания в момент t_1 спадает без скачка. Построено по формулам шага 4.

Обратите внимание. Напряжение на катушке при размыкании меняется скачком: было $\frac{2}{3}\mathcal{E}$, стало $I_L R = \frac{\mathcal{E}}{3}$ с противоположным знаком. Непрерывен ток катушки, а не напряжение на ней.

Ответ.

$$U_0 = \frac{R}{R+r}\,\mathcal{E} = \frac{3}{4}\,\mathcal{E}; \qquad Q = \frac{L}{2}\Big(\frac{\mathcal{E}-U}{r} - \frac{U}{R}\Big)^2 = \frac{L\mathcal{E}^2}{162\,r^2}$$

Проверка. Размерность: $\frac{L\mathcal{E}^2}{r^2} = LI^2$ — джоули. Предел: если размыкать в самом начале ($U = \frac{3}{4}\mathcal{E}$), то $I_L = \frac{\mathcal{E}}{4r} - \frac{\mathcal{E}}{4r} = 0$ и $Q = 0$ — ток в катушке не успел появиться. Второй способ (шаг 4) дал тот же ток $\frac{\mathcal{E}}{9r}$.

Смысл: катушка запасает энергию, пока к ней подключён источник, и отдаёт её резистору после размыкания.

Ответ. 1) $U_0 = \frac{3}{4}\mathcal{E}$; 2) $Q = \frac{L\mathcal{E}^2}{162r^2}$.