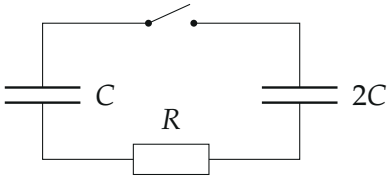
Тепло при соединении конденсаторов C и $2C$ резистором

Задача 6. [Физтех 2008/09, 11 класс, задача 6] В цепи, показанной на рисунке, конденсатор ёмкостью C заряжен до напряжения U_0, а конденсатор ёмкостью $2C$ — до напряжения $3U_0$. Одноимённо заряженные обкладки соединены резистором сопротивлением R. Ключ замыкают на некоторое время, а затем размыкают.

1. Найдите ток в цепи сразу после замыкания ключа.
2. Какое количество теплоты выделилось в цепи, если в момент размыкания ключа ток в цепи был в 2 раза меньше начального?



▲ **Решение. Что происходит.** Задача на перезарядку конденсаторов через резистор. После замыкания ключа заряд перетекает с конденсатора с большим напряжением на другой, напряжения сближаются, ток убывает. Сохраняется суммарный заряд соединённых между собой обкладок (закон сохранения заряда), энергия конденсаторов убывает — разность уходит в теплоту в резисторе.

Обозначения. Пусть нижние обкладки обоих конденсаторов заряжены положительно (они соединены резистором, рис. 1); U_1 и U_2 — напряжения на конденсаторах C и $2C$ (нижняя обкладка минус верхняя), I — ток. Обход контура: верхние обкладки соединены ключом напрямую, значит, напряжение на резисторе равно разности напряжений конденсаторов.

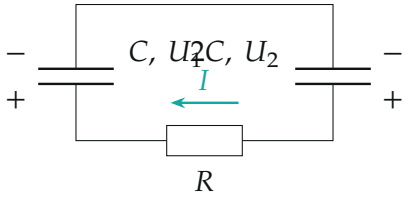


Рис. 1. Знаки зарядов обкладок и направление тока: через резистор ток идёт от конденсатора $2C$ (у него напряжение больше) к конденсатору C.

Пункт 1.

1. Ток сразу после замыкания. Заряды конденсаторов мгновенно измениться не могут, поэтому в первый момент $U_1 = U_0$, $U_2 = 3U_0$. Второе правило Кирхгофа для контура: напряжение на резисторе $U_2 - U_1$, закон Ома:

$$I_0 = \frac{U_2 - U_1}{R} = \frac{3U_0 - U_0}{R} = \frac{2U_0}{R}.$$

Пункт 2.

2. Напряжения в момент размыкания. Ток $I = \frac{I_0}{2} = \frac{U_0}{R}$, поэтому

$$U_2 - U_1 = IR = U_0.$$

Нижние обкладки вместе с резистором образуют изолированную систему (с остальной цепью их связывает только диэлектрик конденсаторов), её заряд сохраняется:

$$CU_1 + 2CU_2 = CU_0 + 2C \cdot 3U_0 = 7CU_0.$$

Подставим $U_2 = U_1 + U_0$: $3U_1 + 2U_0 = 7U_0$, откуда

$$U_1 = \frac{5}{3}U_0, \qquad U_2 = \frac{8}{3}U_0.$$

3. Теплота — убыль энергии конденсаторов. Закон сохранения энергии: источников нет, вся убыль энергии электрического поля выделяется теплотой в резисторе. Начальная энергия

$$W_1 = \frac{CU_0^2}{2} + \frac{2C(3U_0)^2}{2} = \frac{19}{2}CU_0^2,$$

энергия в момент размыкания

$$W_2 = \frac{C}{2}\cdot\frac{25U_0^2}{9} + \frac{2C}{2}\cdot\frac{64U_0^2}{9} = \frac{25+128}{18}CU_0^2 = \frac{17}{2}CU_0^2.$$

$$Q = W_1 - W_2 = CU_0^2.$$

После размыкания ток прекращается, напряжения больше не меняются (рис. 2).

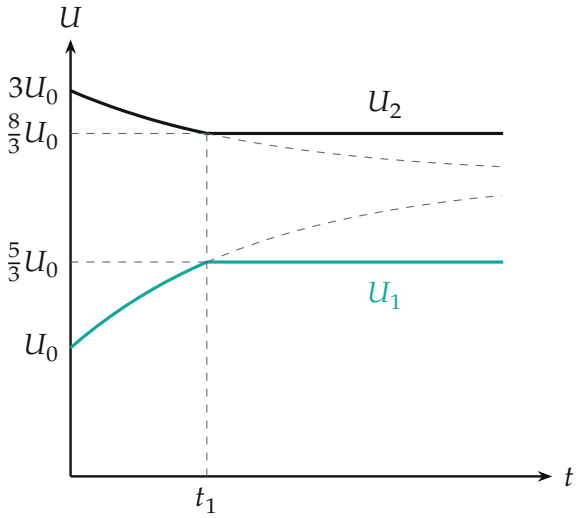


Рис. 2. Напряжения на конденсаторах. В момент t_1 их разность упала вдвое, и ключ разомкнули; серым пунктиром — как шло бы дальше без размыкания (к общему $\frac{7}{3}U_0$). Построено по формулам шага 4.

4. Зависимость от времени (для графика). Ток $I = (U_2 - U_1)/R$ уменьшает заряд $2C$ и увеличивает заряд C: $\frac{d(U_2-U_1)}{dt} = -I(\frac{1}{C} + \frac{1}{2C})$, откуда $U_2 - U_1 = 2U_0 e^{-t/\tau}$, $\tau = \frac{2}{3}RC$; ток падает вдвое при $t_1 = \tau \ln 2$. Конденсаторы ведут себя как один последовательный конденсатор $\frac{C\cdot 2C}{3C} = \frac{2}{3}C$ с напряжением $U_2 - U_1$.

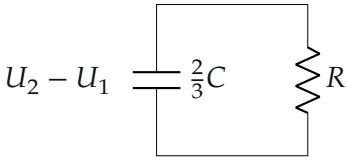


Рис. 3. Эквивалентная схема: два конденсатора в контуре — один конденсатор $\frac{2}{3}C$, заряженный до разности напряжений.

5. Второй способ для теплоты. Теплота при перезарядке — убыль энергии этого эквивалентного конденсатора $\frac{2}{3}C$:

$$Q = \frac{\frac{2}{3}C}{2}\left((2U_0)^2 - U_0^2\right) = \frac{1}{3}C \cdot 3U_0^2 = CU_0^2.$$

То же: часть энергии, связанная с общим зарядом, не меняется, меняется только «разностная».

Обратите внимание. Напряжение на резисторе — разность, а не сумма напряжений конденсаторов: соединены одноимённые обкладки. Если бы соединили разноимённые, начальный ток был бы $4U_0/R$.

Ответ.

$$\boxed{I_0 = \frac{2U_0}{R}; \qquad Q = \frac{1}{3}C(4U_0^2 - U_0^2) = CU_0^2}$$

Проверка. Размерность: $[U/R] = \text{А}$, $[CU^2] = \text{Дж}$. Если бы ключ не размыкали, ток упал бы до нуля и $Q_{\max} = \frac{1}{3}C(2U_0)^2 = \frac{4}{3}CU_0^2$; наше Q меньше — разумно. Два способа (шаги 3 и 5) дали одно и то же.

Смысл: теплота определяется только тем, насколько уменьшилась разность напряжений конденсаторов.

Ответ. 1) $I_0 = \frac{2U_0}{R}$; 2) $Q = CU_0^2$.