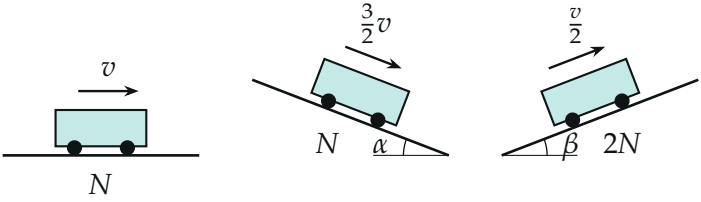
Автобус на подъёме и спуске при пропорциональном сопротивлении

Задача 1. [Физтех 2009/10, 11 класс, задача 1] При движении автобуса по горизонтальному участку дороги у него устанавливается скорость v, если на ведущие колёса передаётся мощность N. При движении на спуске с углом наклона поверхности дороги к горизонту α ($\sin\alpha = 1/30$) при передаваемой на ведущие колёса той же мощности N у автобуса устанавливается скорость $3v/2$. При движении на подъёме при передаваемой на ведущие колёса мощности $2N$ у автобуса устанавливается скорость $v/2$. Найдите синус угла наклона поверхности дороги к горизонту на подъёме. Сила сопротивления движению автобуса пропорциональна его скорости. Все участки дороги прямолинейные.



Поясняющий рисунок: три режима движения — горизонтальный участок, спуск, подъём (углы преувеличены).

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на установившееся движение с мощностью. «Устанавливается скорость» значит, что ускорение равно нулю и силы вдоль дороги уравновешены. Сила тяги на ведущих колёсах связана с мощностью: $F = N/v$. Против движения действует сила сопротивления kv, а на наклонном участке — ещё проекция силы тяжести на дорогу: на спуске она помогает, на подъёме мешает. Три режима дают три уравнения; неизвестных — k, масса и $\sin\beta$, но всё нужное выражается через одно отношение.

Обозначения. M — масса автобуса, k — коэффициент сопротивления ($F_{\text{сопр}} = kv$), β — угол подъёма; ось x — вдоль дороги по направлению движения, ось y — перпендикулярно дороге.

1. Связь силы тяги и мощности. Мощность силы тяги при скорости u: $N = F_т u$, поэтому $F_т = N/u$. На автобус действуют сила тяжести $M\vec{g}$, нормальная реакция дороги $\vec{N}_р$, сила тяги $\vec{F}_т$ и сила сопротивления $\vec{F}_{сопр}$ (рис. 1). Второй закон Ньютона при равномерном движении: $M\vec{g} + \vec{N}_р + \vec{F}_т + \vec{F}_{сопр} = 0$. Нормальная реакция перпендикулярна оси x и в проекцию не войдёт.

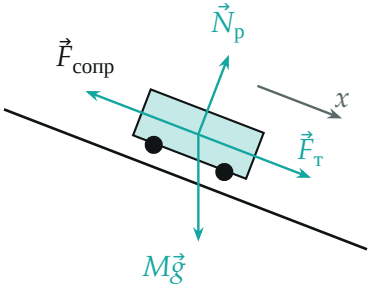


Рис. 1. Силы на спуске: движение вниз по склону (ось x), проекция силы тяжести на ось x равна $+Mg\sin\alpha$.

2. Три режима в проекции на ось x.

$$\text{горизонталь:}\quad \frac{N}{v} - kv = 0,$$

$$\text{спуск:}\quad \frac{N}{3v/2} + Mg\sin\alpha - k\cdot\frac{3v}{2} = 0,$$

$$\text{подъём:}\quad \frac{2N}{v/2} - Mg\sin\beta - k\cdot\frac{v}{2} = 0.$$

На спуске проекция силы тяжести на ось движения положительна (рис. 1), на подъёме — отрицательна (рис. 2).

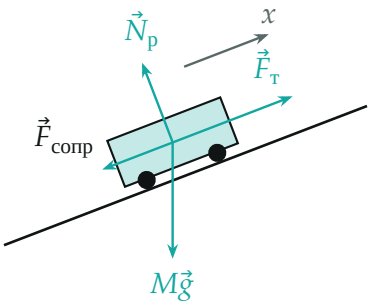


Рис. 2. Силы на подъёме: проекция силы тяжести на ось x равна $-Mg\sin\beta$; тяга при $2N$ и малой скорости $v/2$ велика.

3. Решение системы. Из первого уравнения $k = N/v^2$. Подставим во второе:

$$\frac{2N}{3v} + Mg\sin\alpha = \frac{3N}{2v} \quad \Rightarrow \quad Mg\sin\alpha = \frac{5N}{6v},$$

и при $\sin\alpha = \frac{1}{30}$

$$Mg = \frac{5N}{6v}\cdot 30 = \frac{25N}{v}.$$

Подставим k и Mg в третье:

$$\frac{4N}{v} - \frac{N}{2v} = \frac{25N}{v}\sin\beta \quad \Rightarrow \quad \sin\beta = \frac{7/2}{25} = \frac{7}{50}.$$

4. Графическая проверка. Установившаяся скорость — точка, где сила тяги N/u (гипербола) равна сумме сил, тормозящих автобус (прямая ku, сдвинутая вниз на $Mg\sin\alpha$ на спуске и вверх на $Mg\sin\beta$ на подъёме). Рис. 3 построен в единицах $N = v = 1$: при $k = 1$, $Mg = 25$ прямые пересекают гиперболы ровно при $u = v$, $\frac{3}{2}v$, $\frac{v}{2}$.

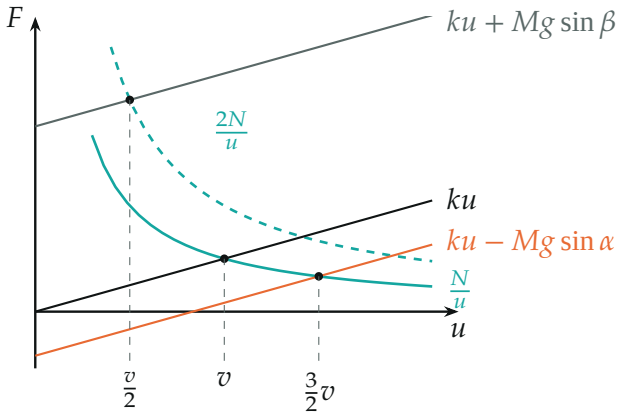


Рис. 3. Сила тяги (бирюзовые гиперболы: сплошная — N, пунктир — $2N$) и тормозящие силы (прямые); точки пересечения — установившиеся скорости трёх режимов (масштаб: $N = v = k = 1$, $Mg = 25$).

Обратите внимание. Сила тяги не постоянна: при той же мощности она обратно пропорциональна скорости. Поэтому на спуске при N тяга $\frac{2N}{3v}$, а на подъёме при $2N$ — уже $\frac{4N}{v}$, вчетверо больше, чем на горизонтали.

Ответ.

$$\sin\beta = \frac{2N/(v/2) - kv/2}{Mg} = \frac{7}{50} = 0{,}14$$

Проверка. Подстановка в третье уравнение: $4 - \frac{1}{2} - 25 \cdot \frac{7}{50} = 4 - 0{,}5 - 3{,}5 = 0$ (в единицах N/v). Знак разумен: на подъёме тяги вчетверо больше, чем нужно на сопротивление при $v/2$, остаток идёт на подъём — угол положителен и круче спуска ($\frac{7}{50} > \frac{1}{30}$). Размерность: $\sin\beta$ безразмерен, все силы выражены в N/v.

Смысл: горизонтальный участок задаёт сопротивление, спуск — вес автобуса в единицах N/v; подъём после этого определяется однозначно.

Ответ. $\sin\beta = \frac{7}{50}$.