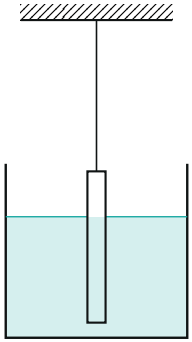
Стержень в воде: сила натяжения нити при разной глубине погружения

Задача 2. [Физтех 2009/10, 11 класс, задача 2] Однородный стержень постоянного поперечного сечения висит на нити. При этом 70% длины стержня находится в воде. Когда стержень переместили вверх, оставив в воде 30% его длины, сила натяжения нити увеличилась на 20%. Найдите плотность материала стержня. Плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см^3.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на равновесие тела в жидкости. На стержень действуют три вертикальные силы: тяжести, Архимеда и натяжения нити. Когда стержень поднимают, погружённый объём уменьшается, сила Архимеда падает, и нить должна держать больше. Сравнение двух равновесий даёт плотность стержня в единицах плотности воды.

Обозначения. l — длина стержня, S — площадь сечения, $V = lS$ — его объём, ρ — искомая плотность, T_1 и T_2 — натяжения нити в первом и втором положениях ($T_2 = 1{,}2\,T_1$); ось y — вертикально вверх.

1. Первое положение. Погружено $0{,}7\,l$, погружённый объём $0{,}7V$. Закон Архимеда: $F_{A1} = \rho_0 g \cdot 0{,}7V$. Условие равновесия стержня (второй закон Ньютона при $a = 0$) в проекции на ось y (рис. 1):

$$T_1 + \rho_0 g \cdot 0{,}7V - \rho g V = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 = gV(\rho - 0{,}7\rho_0).$$

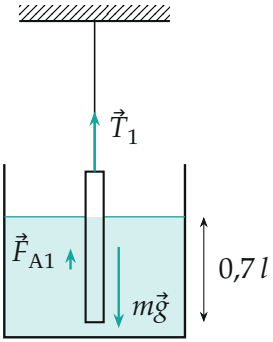


Рис. 1. Первое положение: в воде 70% длины; сила Архимеда приложена в центре погружённой части, сила тяжести — в середине стержня; длины стрелок пропорциональны силам при $\rho = 2{,}7\rho_0$.

2. Второе положение. Погружено $0{,}3\,l$ (рис. 2), и так же

$$T_2 = gV(\rho - 0{,}3\rho_0).$$

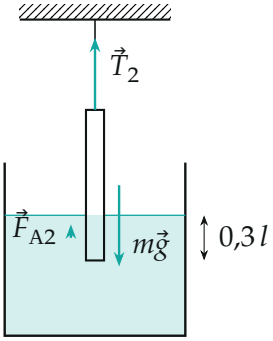


Рис. 2. Второе положение: в воде 30% длины, сила Архимеда меньше, натяжение больше.

3. Плотность. По условию $T_2 = 1{,}2\,T_1$:

$$\rho - 0{,}3\rho_0 = 1{,}2\,(\rho - 0{,}7\rho_0) \quad \Rightarrow \quad 0{,}2\,\rho = 0{,}54\,\rho_0 \quad \Rightarrow \quad \rho = 2{,}7\,\rho_0.$$

Множитель gV сократился — ни объём, ни сечение знать не нужно.

4. Наглядно. Натяжение линейно зависит от погружённой доли x длины: $T = gV(\rho - x\rho_0)$. На рис. 3 это прямая; она обращается в ноль при

$x = \rho/\rho_0 = 2{,}7$ — за пределами $x \le 1$, то есть стержень тонет и без нити ни при каком погружении не плавает, как и положено алюминию.

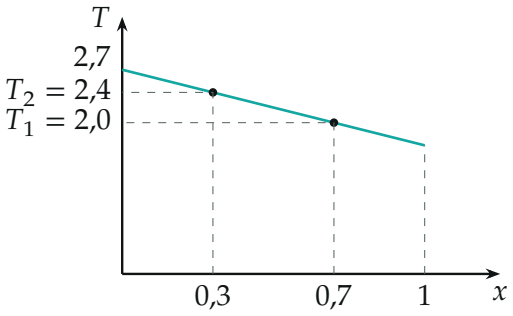


Рис. 3. Натяжение нити в единицах $\rho_0 g V$ в зависимости от погружённой доли длины x при $\rho = 2{,}7\rho_0$ (по точкам): $T_2/T_1 = 2{,}4/2{,}0 = 1{,}2$.

Обратите внимание. «Увеличилась на 20%» означает $T_2 = 1{,}2\,T_1$, а не $T_2 = T_1 + 0{,}2\,mg$: проценты считаются от натяжения, а не от веса.

Ответ.

$$\rho = \frac{1{,}2 \cdot 0{,}7 - 0{,}3}{1{,}2 - 1}\,\rho_0 = 2{,}7\,\rho_0 = 2{,}7 \text{ г/см}^3$$

Проверка. Подстановка: $T_1 \propto 2{,}7 - 0{,}7 = 2{,}0$, $T_2 \propto 2{,}7 - 0{,}3 = 2{,}4$, отношение 1,2 — верно. Предельный случай: если бы натяжение не изменилось ($1{,}2 \to 1$), знаменатель обратился бы в ноль, $\rho \to \infty$ — для бесконечно тяжёлого стержня сила Архимеда пренебрежимо мала, это разумно. Ответ больше ρ_0: стержень тонул бы без нити, как и должно быть, раз нить натянута при любом погружении.

Смысл: подъём стержня на 40% длины уменьшает силу Архимеда на $0{,}4\rho_0 g V$, и эта величина — ровно 20% натяжения; отсюда натяжение и вес в единицах $\rho_0 g V$.

Ответ. $\rho = 2{,}7\,\rho_0 = 2{,}7$ г/см^3.