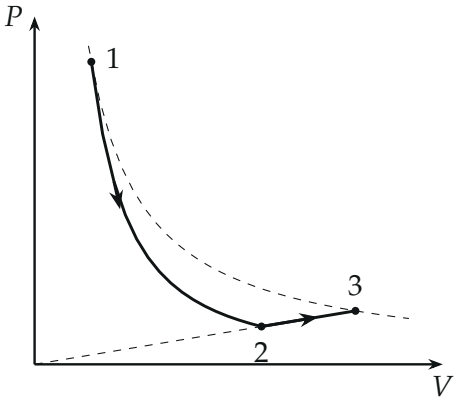
Гелий: процесс с постоянной теплоёмкостью и процесс $p \propto V$

Задача 3. [Физтех 2009/10, 11 класс, задача 3] Газообразный гелий из начального состояния 1 расширяется в процессе 1–2 с постоянной теплоёмкостью, совершая в нём работу $A_{12} = 400$ Дж. Затем к газу подводится количество теплоты $Q_{23} = 400$ Дж в процессе 2–3, в котором давление прямо пропорционально объёму. Температуры в состояниях 1 и 3 равны.



1. Найдите количество теплоты, подведённое к газу в процессе 1–2.
2. Найдите молярную теплоёмкость газа в процессе 1–2, выразив её через R.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на первое начало термодинамики для идеального одноатомного газа. Ключ — равенство температур в 1 и 3: внутренняя энергия гелия зависит только от температуры, поэтому за два процесса она в сумме не меняется, $\Delta U_{12} = -\Delta U_{23}$. Процесс 2–3 ($p \propto V$) полностью «прозрачен»: в нём теплота, работа и изменение энергии жёстко связаны, и данные Q_{23} дают ΔU_{23}. Дальше первое начало для 1–2 даёт Q_{12}, а теплоёмкость — отношение Q_{12} к $\nu\Delta T_{12}$.

Обозначения. ν — количество гелия, $T_1 = T_3$, T_2 — температуры; ΔU, A, Q с индексами — изменение внутренней энергии, работа газа

и подведённая теплота на участках; C — молярная теплоёмкость в процессе 1–2; $U = \frac{3}{2}\nu RT$.

1. Процесс 2–3: $p = aV$**.** Работа газа — площадь трапеции под отрезком 2–3 (рис. 1):

$$A_{23} = \frac{p_2 + p_3}{2}(V_3 - V_2) = \frac{a}{2}(V_3^2 - V_2^2),$$

$$A_{23} = \frac{1}{2}(p_3V_3 - p_2V_2) = \frac{1}{2}\nu R\,(T_3 - T_2),$$

где использовано $aV^2 = pV = \nu RT$. Изменение внутренней энергии $\Delta U_{23} = \frac{3}{2}\nu R(T_3 - T_2)$. Первое начало термодинамики:

$$Q_{23} = \Delta U_{23} + A_{23} = 2\,\nu R(T_3 - T_2) \quad \Rightarrow \quad \nu R(T_3 - T_2) = 200\ \text{Дж}.$$

Отсюда $\Delta U_{23} = 300$ Дж, $A_{23} = 100$ Дж.

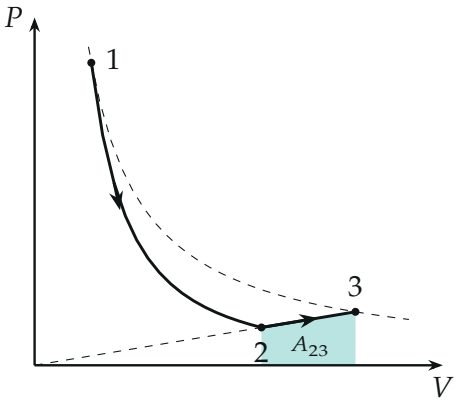


Рис. 1. Работа в процессе 2–3 — площадь трапеции под отрезком прямой, проходящей через начало координат (построено по точкам с $V_2 = 4V_1$).

2. Процесс 1–2: теплота. Внутренняя энергия идеального газа — функция температуры, $T_1 = T_3$, поэтому

$$\Delta U_{12} + \Delta U_{23} = U_3 - U_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta U_{12} = -300\ \text{Дж}.$$

Первое начало термодинамики для 1–2:

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = -300 + 400 = 100 \text{ Дж}.$$

Газ получил тепло, но остыл: работа 400 Дж больше подведённой теплоты, недостающие 300 Дж взяты из внутренней энергии (рис. 2).

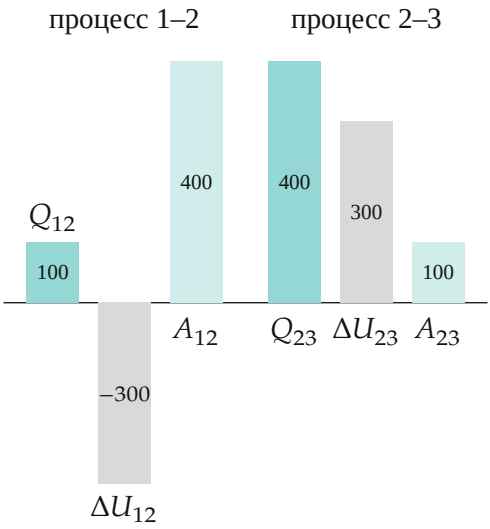


Рис. 2. Баланс энергии (в джоулях, высоты в масштабе): на каждом участке $Q = \Delta U + A$, а $\Delta U_{12} = -\Delta U_{23}$.

3. Теплоёмкость в процессе 1–2. Молярная теплоёмкость: $Q_{12} = \nu C\,(T_2 - T_1)$. Изменение температуры — из $\Delta U_{12} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) = -300$ Дж: $\nu(T_2 - T_1) = -\dfrac{200}{R}$. Тогда

$$C = \frac{Q_{12}}{\nu(T_2 - T_1)} = \frac{100}{-200/R} = -\frac{R}{2}.$$

Теплоёмкость отрицательна: тепло подводят, а температура падает.

4. Какая это кривая. Процесс с постоянной теплоёмкостью — политропа $pV^n = \text{const}$ с $C = C_V - \dfrac{R}{n-1}$. При $C = -\frac{R}{2}$, $C_V = \frac{3}{2}R$: $n - 1 = \frac{1}{2}$, $n = \frac{3}{2}$. Она круче изотермы ($n > 1$), поэтому из точки 1 газ уходит ниже

изотермы T_1 (рис. 3) — остывает, как и получилось. Работа на политропе $A_{12} = \dfrac{\nu R(T_1 - T_2)}{n-1} = \dfrac{200}{1/2} = 400$ Дж — совпадает с условием, данные согласованы.

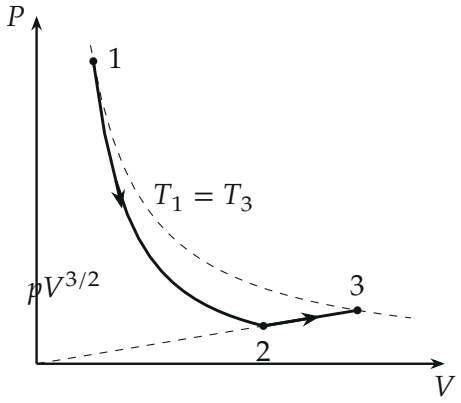


Рис. 3. Процесс 1–2 — политропа $pV^{3/2} = \text{const}$ (сплошная), она идёт ниже изотермы $T_1 = T_3$ (пунктир): газ остывает от 1 к 2 и нагревается от 2 к 3.

Обратите внимание. Отрицательная теплоёмкость — не ошибка: при расширении газ совершает работу больше подведённой теплоты и потому остывает.

Ответ.

$$\boxed{Q_{12} = A_{12} - \frac{3}{4}Q_{23} = 100 \text{ Дж}, \qquad C = -\frac{R}{2}}$$

Проверка. Общий вид: $\Delta U_{23} = \frac{3}{4}Q_{23}$ (в процессе $p \propto V$ теплоёмкость $2R$, из неё $\frac{3}{2}R$ на энергию), $Q_{12} = A_{12} - \frac{3}{4}Q_{23}$; размерность — джоули. Второй способ для C: политропа с работой 400 Дж и $\Delta U = -300$ Дж даёт $n = \frac{3}{2}$ и $C = \frac{3}{2}R - 2R = -\frac{R}{2}$ — то же.

Смысл: равенство температур в 1 и 3 «переносит» изменение энергии из простого процесса 2–3 в процесс 1–2, а там первое начало сразу даёт теплоту.

Ответ. 1) $Q_{12} = 100$ Дж; 2) $C = -\dfrac{R}{2}$.