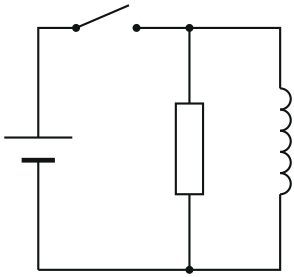
Цепь с катушкой: заряды и теплота при замыкании и размыкании ключа

Задача 4. [Физтех 2009/10, 11 класс, задача 4] В цепи, показанной на рисунке, все элементы можно считать идеальными. В начальный момент ключ разомкнут, ток в цепи отсутствует. Ключ на некоторое время замыкают, а потом размыкают. Оказалось, что после размыкания ключа в цепи выделилось в два раза больше теплоты, чем при замкнутом ключе. Найдите отношение заряда, протекшего через источник при замкнутом ключе, к заряду, протекшему через резистор после размыкания ключа.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на катушку в цепи постоянного тока. Источник идеальный, поэтому при замкнутом ключе на резисторе и на катушке одно и то же напряжение $\mathcal{E}$: ток через резистор сразу постоянный, а ток катушки растёт линейно. После размыкания катушка поддерживает свой ток, он замыкается через резистор и затухает; вся энергия поля катушки уходит в тепло. Заряды — это площади под графиками токов.

Обозначения. $\mathcal{E}$ — ЭДС, R — сопротивление, L — индуктивность; τ — время, в течение которого ключ замкнут; I_0 — ток катушки в момент размыкания; Q_1, Q_2 — теплота при замкнутом ключе и после размыкания ($Q_2 = 2Q_1$); $q_и$ — заряд через источник при замкнутом ключе, q_R — заряд через резистор после размыкания.

1. Ключ замкнут. Резистор и катушка подключены параллельно прямо к идеальному источнику, напряжение на каждом равно $\mathcal{E}$ (рис. 1).

- Резистор, закон Ома: $I_R = \mathcal{E}/R$ — постоянен с момента замыкания.
- Катушка, закон самоиндукции: $L\dfrac{dI_L}{dt} = \mathcal{E}$, ток начинается с нуля и растёт линейно: $I_L = \dfrac{\mathcal{E}t}{L}$; к моменту размыкания $I_0 = \dfrac{\mathcal{E}\tau}{L}$.
- Через источник по первому правилу Кирхгофа $I_и = I_R + I_L$.

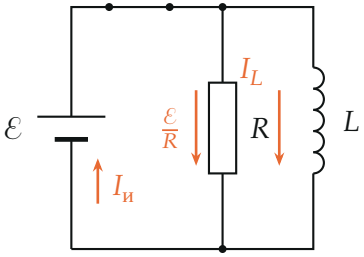


Рис. 1. Ключ замкнут: на резисторе и катушке напряжение $\mathcal{E}$, через источник течёт сумма их токов.

Теплота при замкнутом ключе выделяется только на резисторе (катушка идеальная), закон Джоуля — Ленца:

$$Q_1 = \frac{\mathcal{E}^2}{R}\,\tau.$$

2. После размыкания. Ток катушки не меняется скачком и замыкается через резистор (рис. 2). Источника в контуре нет, ток затухает до нуля, и по закону сохранения энергии вся энергия магнитного поля переходит в тепло:

$$Q_2 = \frac{LI_0^2}{2} = \frac{\mathcal{E}^2\tau^2}{2L}.$$

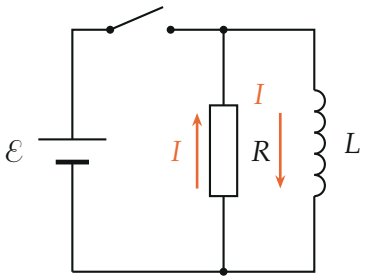


Рис. 2. После размыкания: ток катушки I течёт через резистор в обратную сторону и затухает.

3. Сколько был замкнут ключ. Условие $Q_2 = 2Q_1$:

$$\frac{\mathcal{E}^2\tau^2}{2L} = \frac{2\mathcal{E}^2\tau}{R} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{4L}{R}, \qquad I_0 = \frac{\mathcal{E}\tau}{L} = \frac{4\mathcal{E}}{R}.$$

К моменту размыкания ток катушки вчетверо больше тока резистора.

4. Заряд через источник. Заряд — площадь под графиком тока источника (рис. 3): прямоугольник от I_R плюс треугольник от I_L:

$$q_{\text{и}} = \frac{\mathcal{E}}{R}\tau + \frac{1}{2}I_0\tau = \frac{\mathcal{E}}{R}\cdot\frac{4L}{R} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4\mathcal{E}}{R}\cdot\frac{4L}{R} = \frac{12\,\mathcal{E}L}{R^2}.$$

5. Заряд через резистор после размыкания. Второе правило Кирхгофа для контура катушка — резистор: $L\dfrac{dI}{dt} + IR = 0$. Умножим на dt и просуммируем по всему затуханию (ток от I_0 до 0):

$$L\,(0 - I_0) + R\,q_R = 0 \quad \Rightarrow \quad q_R = \frac{LI_0}{R} = \frac{4\,\mathcal{E}L}{R^2}.$$

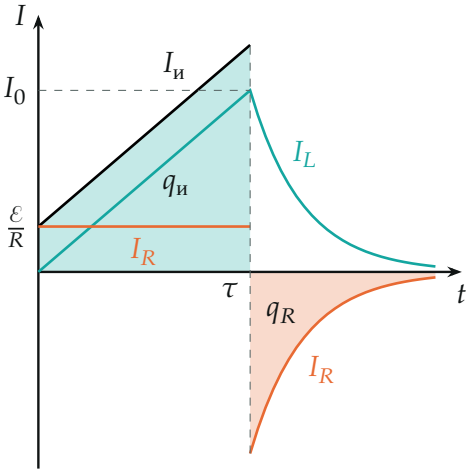


Рис. 3. Токи, посчитанные для $\tau = 4L/R$ (по точкам): I_L (бирюзовый) растёт линейно до $I_0 = 4\mathcal{E}/R$, затем затухает экспонентой; I_R (морковный) постоянен, после размыкания отрицателен; $I_u = I_R + I_L$ (чёрный). Площади: q_u — бирюзовая, q_R — морковная, их отношение 12 : 4.

Обратите внимание. Время затухания после размыкания знать не нужно: заряд через резистор выражается через изменение тока катушки, $q_R = L\Delta I/R$, независимо от формы спада.

Ответ.

$$\boxed{\frac{q_и}{q_R} = \frac{\mathcal{E}\tau/R + I_0\tau/2}{LI_0/R} = 3}$$

Проверка. Энергия источника $\mathcal{E}q_и = \dfrac{12\mathcal{E}^2L}{R^2}$ должна равняться $Q_1 + Q_2 = 3Q_1 = 3 \cdot \dfrac{\mathcal{E}^2}{R} \cdot \dfrac{4L}{R} = \dfrac{12\mathcal{E}^2L}{R^2}$ — совпадает (всё, что дал источник, ушло в тепло: при замкнутом ключе на резистор, остальное — через катушку после размыкания). Размерность $\mathcal{E}L/R^2$: $\text{В} \cdot \text{Ом} \cdot \text{с}/\text{Ом}^2 = \text{А} \cdot \text{с}$ — заряд.

Смысл: условие на теплоты задаёт, как долго был замкнут ключ ($\tau = 4L/R$), а при известном τ оба заряда — площади под простыми графиками токов.

Ответ. $\dfrac{q_и}{q_R} = 3$.