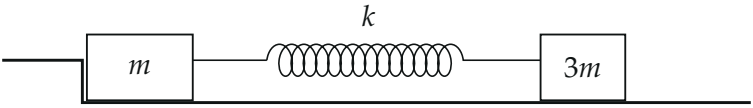
Два бруска и сжатая пружина

Задача 1. [Физтех 2010/11, 11 класс, задача 1] На гладкой горизонтальной поверхности стола находятся бруски массами m и $3m$, к которым прикреплена лёгкая упругая пружина жёсткостью k, сжатая на величину x_0 (см. рис.). Брусок массой $3m$ удерживают неподвижно, другой брусок прижат к упору. Затем брусок массой $3m$ отпускают.

1. Найдите скорость бруска массой $3m$ в момент отрыва другого бруска от упора.
2. Найдите величину деформации пружины при минимальном расстоянии между брусками в процессе их движения после отрыва от упора.

Примечание. Величиной деформации называется модуль разности длин пружины в напряжённом и ненапряжённом состояниях.



▲ **Решение. Что происходит.** Сжатая пружина толкает брусок m в упор, а брусок $3m$ — вправо. Брусок m стоит, пока пружина сжата; когда она распрямится до своей длины, сжатие кончится, и дальше растянутая пружина потянет брусок m от упора. Значит, отрыв — в момент, когда пружина не деформирована. После отрыва горизонтальных внешних сил нет: бруски колеблются друг относительно друга, а их центр масс движется равномерно. Расстояние между брусками экстремально, когда их скорости равны. Задача из двух этапов: закон сохранения энергии при неподвижном бруске m, затем законы сохранения импульса и энергии системы двух брусков.

Обозначения. Ось x — горизонтально вправо, от упора. v — скорость бруска $3m$ в момент отрыва, u — общая скорость брусков при минимальном расстоянии, x — деформация пружины в этот момент.

1. Когда брусок отрывается. На брусок m по горизонтали действуют сила упругости пружины $F_{\text{упр}}$ и сила реакции упора N, которая может только толкать вправо (рис. 1). Пока брусок покоится, второй закон

Ньютона в проекции на ось x: $N - F_{\text{упр}} = 0$, где $F_{\text{упр}} = k\Delta l$ — сила, с которой сжатая на Δl пружина давит на брусок влево. Пока пружина сжата, $N = k\Delta l > 0$. Когда пружина распрямилась ($\Delta l = 0$), $N = 0$, а дальше растянутая пружина тянет брусок вправо — упор удержать его не может. Отрыв — в момент, когда пружина не деформирована.

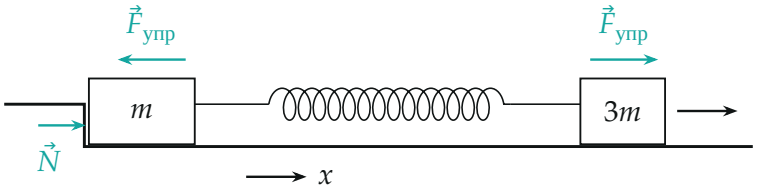


Рис. 1. Пока пружина сжата, она давит на брусок m влево, и упор отвечает силой $\vec{N}$; брусок $3m$ разгоняется вправо. Вертикальные силы не показаны.

Пункт 1.

2. Закон сохранения энергии до отрыва. Брусок m неподвижен, сила упора работы не совершает (точка её приложения не движется), трения нет. Значит, механическая энергия системы сохраняется: от начала до отрыва энергия сжатой пружины целиком переходит в кинетическую энергию бруска $3m$ (рис. 2):

$$\frac{kx_0^2}{2} = \frac{3m\,v^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = x_0\sqrt{\frac{k}{3m}}.$$

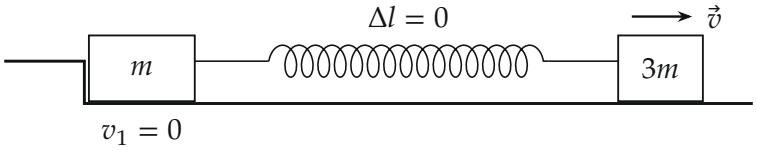


Рис. 2. Момент отрыва: пружина распрямилась, брусок m ещё стоит у упора, брусок $3m$ движется со скоростью $\vec{v}$.

Пункт 2.

3. Что происходит после отрыва. Внешних горизонтальных сил больше нет, поэтому импульс системы сохраняется, а центр масс движется равномерно со скоростью $v_C = \frac{3mv}{4m} = \frac{3}{4}v$. Сначала брусок $3m$ быстрее — пружина растягивается, тормозит его и разгоняет брусок m. Когда скорости сравнялись, растяжение наибольшее; дальше быстрее брусок m, и пружина, пройдя через ненапряжённое состояние, сжимается. Наибольшее сжатие — минимальное расстояние между брусками — снова при равных скоростях (рис. 3): пока скорости разные, расстояние меняется.

4. Закон сохранения импульса. От момента отрыва (брусок m стоит, $3m$ движется со скоростью v) до момента минимального расстояния (оба движутся со скоростью u), в проекции на ось x:

$$3m\,v = (m + 3m)\,u \quad \Rightarrow \quad u = \frac{3}{4}\,v.$$

5. Закон сохранения энергии. Между теми же моментами:

$$\frac{3m\,v^2}{2} = \frac{4m\,u^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{kx^2}{2} = \frac{3}{2}mv^2 - 2m \cdot \frac{9}{16}v^2 = \frac{3}{8}\,mv^2.$$

Подставим $v^2 = \dfrac{kx_0^2}{3m}$:

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{3}{8} \cdot \frac{kx_0^2}{3} = \frac{kx_0^2}{8} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{x_0}{2}.$$

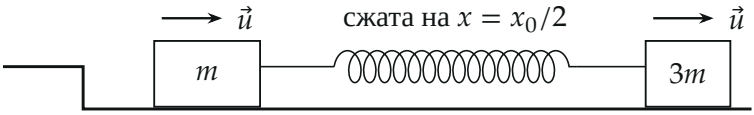


Рис. 3. Минимальное расстояние между брусками: брусок m уже ушёл от упора, скорости брусков одинаковы, пружина максимально сжата.

6. Второй способ — энергия относительного движения. Кинетическая энергия системы делится на энергию движения центра масс $\frac{(4m)v_C^2}{2}$,

которая сохраняется, и энергию относительного движения $\frac{\mu v_{\text{отн}}^2}{2}$ с приведённой массой $\mu = \frac{m\cdot 3m}{4m} = \frac{3}{4}m$. В момент отрыва $v_{\text{отн}} = v$, а пружина не деформирована; при равных скоростях $v_{\text{отн}} = 0$ и вся эта энергия — в пружине:

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{\mu v^2}{2} = \frac{3}{8}mv^2 = \frac{kx_0^2}{8} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{x_0}{2}.$$

То же. Заодно видно, что наибольшее растяжение тоже $x_0/2$: относительные колебания симметричны.

Обратите внимание. До отрыва импульс системы не сохраняется — упор толкает брусок m; поэтому закон сохранения импульса пишем только от момента отрыва. И энергия пружины $\frac{kx_0^2}{2}$ не может вся вернуться в пружину: $\frac{3}{4}$ её остаются в движении центра масс.

Ответ.

$$v = x_0\sqrt{\frac{k}{3m}}; \qquad x = x_0\sqrt{\frac{\mu}{3m}} = x_0\sqrt{\frac{m}{m+3m}} = \frac{x_0}{2}$$

Проверка. Размерность: $\sqrt{k/m}$ — с^{-1}, v — м/с. Предел: если бы левый брусок был бесконечно тяжёлым (стенка), он не сдвинулся бы, и пружина сжалась бы снова на x_0; в общем виде с массой левого бруска M получаем $x = x_0\sqrt{\frac{M}{M+3m}}$, при $M \to \infty$ это x_0, при $M = m$ — $x_0/2$. Второй способ (пункт 6) дал то же.

Смысл: упор «впускает» энергию пружины в систему только как движение бруска $3m$; после отрыва три четверти её уходят на движение центра масс, и на сжатие пружины остаётся четверть энергии — деформация вдвое меньше начальной.

Ответ. 1) $v = x_0\sqrt{\frac{k}{3m}}$; 2) $x = \frac{x_0}{2}$.