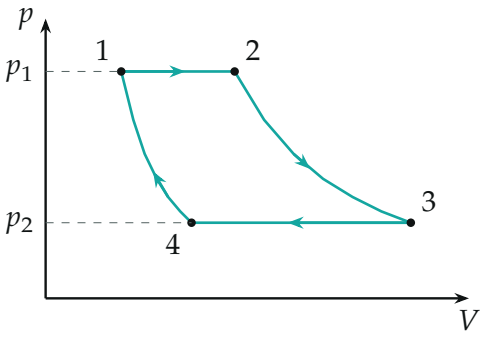
Цикл из двух изобар и двух адиабат

Задача 2. [Физтех 2010/11, 11 класс, задача 2] С идеальным одноатомным газом провели прямой цикл, состоящий из двух изобар и двух адиабат. Оказалось, что работа газа при изобарическом расширении равна A, а суммарное количество теплоты, полученной газом за цикл, равно Q.

1. Какое количество теплоты получил газ при изобарическом расширении?
2. Найдите КПД цикла.



Поясняющий рисунок: прямой цикл 1–2–3–4 — изобарическое расширение 1–2, адиабатическое расширение 2–3, изобарическое сжатие 3–4, адиабатическое сжатие 4–1 (адиабаты $pV^{5/3} = \text{const}$ построены по точкам).

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на первое начало термодинамики для цикла. На адиабатах теплообмена нет, поэтому тепло газ получает только на изобарическом расширении 1–2 (там растут и объём, и температура) и отдаёт только на изобарическом сжатии 3–4. На изобаре теплота и работа связаны жёстко: для одноатомного газа $Q = \frac{5}{2} p\Delta V$. Отсюда пункт 1. «Суммарная теплота за цикл» — это $Q_{12} + Q_{34}$, а по первому началу за цикл она равна работе цикла, что и даёт КПД.

Обозначения. Состояния 1, 2, 3, 4 — как на рисунке к условию; ν — количество вещества; Q_{12} — теплота на изобарическом расширении, $Q_{34} < 0$ — на изобарическом сжатии; $A_{\text{ц}}$ — работа газа за цикл; η — КПД.

1. Где газ получает тепло. Первое начало термодинамики на каждом участке: $Q = \Delta U + A_{\text{газа}}$.

- 2–3 и 4–1 — адиабаты: $Q_{23} = Q_{41} = 0$;
- 1–2 — изобара при расширении: по уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \nu RT$ при $p = \text{const}$ рост V означает рост T, поэтому $\Delta U_{12} > 0$ и $A_{12} > 0$, то есть $Q_{12} > 0$;
- 3–4 — изобара при сжатии: T и V падают, $Q_{34} < 0$.

Нагреватель отдаёт газу только Q_{12} (рис. 1), холодильник получает $|Q_{34}|$.

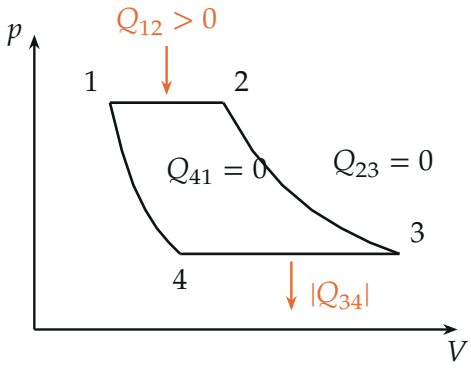


Рис. 1. Теплообмен на участках цикла: тепло входит только на 1–2 и выходит только на 3–4.

Пункт 1. Теплота на изобарическом расширении. Работа газа при постоянном давлении p_1:

$$A = p_1(V_2 - V_1) = \nu R(T_2 - T_1),$$

второе равенство — уравнение Менделеева — Клапейрона для состояний 1 и 2. Изменение внутренней энергии одноатомного идеального газа:

$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}A.$$

Первое начало термодинамики для участка 1–2:

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A = \frac{3}{2}A + A = \frac{5}{2}A.$$

Из каждых пяти частей подведённого тепла три идут на нагрев газа и две — на работу (рис. 2).

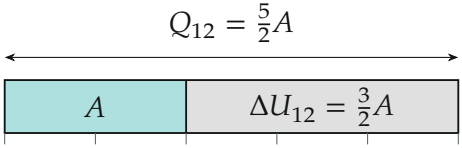


Рис. 2. Изобарическое расширение одноатомного газа: Q_{12} делится на работу и рост внутренней энергии в отношении 2 : 3.

Пункт 2. КПД цикла. За цикл газ возвращается в состояние 1, поэтому $\Delta U_{\text{ц}} = 0$, и первое начало для всего цикла даёт

$$A_{\text{ц}} = Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} + Q_{41} = Q_{12} + Q_{34}.$$

Правая часть — это и есть суммарная теплота, полученная газом за цикл, она дана: $A_{\text{ц}} = Q$. КПД — отношение работы за цикл к теплоте, полученной от нагревателя (рис. 3):

$$\eta = \frac{A_{\text{ц}}}{Q_{12}} = \frac{Q}{\frac{5}{2}A} = \frac{2Q}{5A}.$$

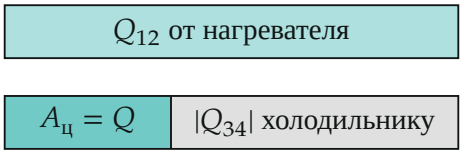


Рис. 3. Баланс энергии за цикл: тепло нагревателя Q_{12} уходит в работу $A_{\text{ц}}$ и в тепло холодильнику; суммарная теплота $Q_{12} - |Q_{34}|$ равна работе цикла.

Обратите внимание. Q в условии — не теплота от нагревателя, а сумма теплот со знаками за весь цикл; поэтому она равна работе цикла, а КПД — не Q/A.

Ответ.

$$\boxed{Q_{12} = \frac{5}{2}A, \qquad \eta = \frac{2Q}{5A}}$$

Проверка. Размерности: обе величины — энергия и безразмерное число. Так как $A_{\text{ц}} = Q < Q_{12}$, выходит $\eta < 1$, как и должно быть. Второй способ для пункта 1: теплоёмкость одноатомного газа при постоянном давлении $C_p = \frac{5}{2}R$, поэтому $Q_{12} = \frac{5}{2}\nu R\Delta T = \frac{5}{2}A$ — то же.

Смысл: на изобаре одноатомного газа на работу уходит ровно $2/5$ подведённого тепла, поэтому работа A сразу задаёт теплоту нагревателя, а КПД — доля этой теплоты, ставшая работой цикла.

Ответ. 1) $Q_{12} = \frac{5}{2}A$; 2) $\eta = \frac{2Q}{5A}$.