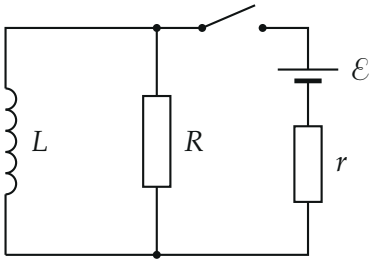
Замыкание и размыкание цепи с катушкой

Задача 4. [Физтех 2010/11, 11 класс, задача 4] В схеме, показанной на рисунке, все элементы можно считать идеальными, параметры элементов указаны на рисунке. До замыкания ключа ток в цепи отсутствовал. Ключ замыкают на некоторое время, а затем размыкают. Оказалось, что величина тока через резистор R непосредственно перед размыканием ключа и сразу после размыкания ключа одинакова.



1. Найдите ток через резистор R сразу после замыкания ключа.
2. Найдите ток через катушку сразу после размыкания ключа.
3. Какое количество теплоты выделится в цепи после размыкания ключа?

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на переходные процессы с катушкой. Главное свойство катушки: ток через неё не может измениться скачком (иначе ЭДС самоиндукции $-L\dfrac{dI}{dt}$ была бы бесконечной). Поэтому в момент замыкания катушка ведёт себя как разрыв цепи, а в момент размыкания — как источник тока, равного её току. Напряжения и токи резисторов скачком меняться могут. После размыкания вся энергия магнитного поля катушки уходит в тепло на резисторе R.

Обозначения. Катушка L, резистор R и ветвь «ключ — источник $\mathcal{E}$ — резистор r» подключены параллельно к двум узлам (верхнему и нижнему). I_L — ток катушки, I_R — ток резистора R; I_{R0} — ток через R сразу после замыкания; I_0 — ток катушки в момент размыкания; t_1 — момент размыкания.

Пункт 1. Сразу после замыкания. До замыкания тока не было, ток катушки скачком не меняется, поэтому сразу после замыкания $I_L = 0$: катушку можно мысленно убрать (рис. 1). Остаётся один контур «источник — r — R». Закон Ома для полной цепи:

$$I_{R0} = \frac{\mathcal{E}}{R + r}.$$

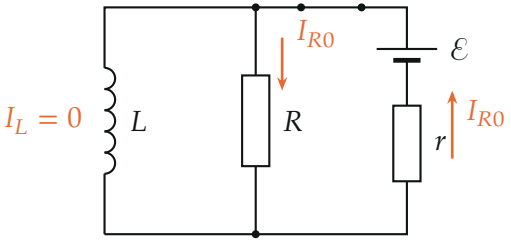


Рис. 1. Сразу после замыкания: ток катушки ещё равен нулю, ток идёт по контуру $\mathcal{E}$ — r — R.

Пункт 2. Перед размыканием и сразу после. Пусть перед размыканием через катушку идёт ток I_0, а через резистор R — ток I_R (рис. 2). По первому правилу Кирхгофа для верхнего узла через источник и резистор r течёт $I_R + I_0$. Катушка идеальная, R и L подключены к одним и тем же узлам, поэтому напряжение на R равно напряжению между узлами. Второе правило Кирхгофа для контура «источник — r — R»:

$$I_R R = \mathcal{E} - (I_R + I_0)\, r.$$

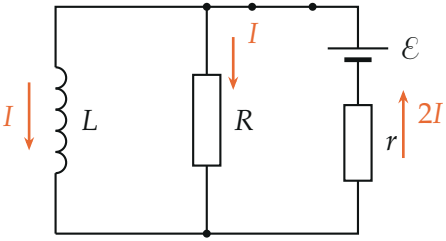


Рис. 2. Перед размыканием: токи катушки и резистора R равны (по условию), через источник течёт их сумма $2I$.

Сразу после размыкания ветвь с источником разорвана, ток катушки I_0 не изменился скачком, и замкнуться он может только через резистор R (рис. 3): $I'_R = I_0$. По условию величины токов через R до и после равны: $I_R = I'_R = I_0$. Подставим $I_R = I_0$ в уравнение Кирхгофа:

$$I_0 R = \mathcal{E} - 2I_0 r \quad \Rightarrow \quad I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R + 2r}.$$

Направление тока через R при этом сменилось на противоположное: катушка гонит ток «по кругу» через R снизу вверх, а источник гнал его сверху вниз; равны именно величины.

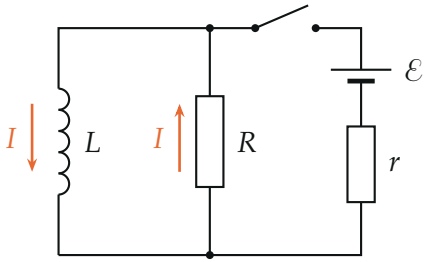


Рис. 3. Сразу после размыкания: ток катушки I_0 замыкается через резистор R (в R — снизу вверх).

Пункт 3. Теплота после размыкания. После размыкания в контуре L–R источника нет; ток убывает до нуля (рис. 4), и закон сохранения энергии говорит: вся энергия магнитного поля катушки $W = \dfrac{LI_0^2}{2}$ переходит в тепло на резисторе R:

$$Q = \frac{LI_0^2}{2} = \frac{L\mathcal{E}^2}{2(R + 2r)^2}.$$

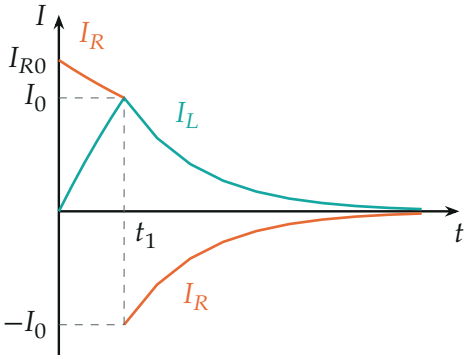


Рис. 4. Токи катушки (бирюзовый) и резистора R (морковный), посчитанные для $R = 2r$: до t_1 ток I_L растёт, I_R падает; в момент t_1 они равны I_0; после размыкания ток через R меняет направление, а по величине совпадает с убывающим током катушки.

Обратите внимание. Условие не означает, что ток успел установиться: установившийся ток катушки был бы $\mathcal{E}/r$ (катушка закоротила бы R), и ток через R перед размыканием был бы нулевым. Ключ размыкают в промежуточный момент t_1, когда $I_L = I_R$.

Ответ.

$$I_{R0} = \frac{\mathcal{E}}{R+r}, \qquad I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R+2r}, \qquad Q = \frac{L\mathcal{E}^2}{2(R+2r)^2}$$

Проверка. Размерности: $\mathcal{E}/R$ — ток, LI^2 — энергия. Такой момент t_1 действительно наступает: ток катушки растёт непрерывно от 0 к $\mathcal{E}/r$, а $I_0 = \mathcal{E}/(R+2r) < \mathcal{E}/r$. Предел $r \to 0$: напряжение на R всегда $\mathcal{E}$, $I_R = \mathcal{E}/R$, и условие $I_R = I_L$ даёт $I_0 = \mathcal{E}/R$ — формула это и даёт.

Смысл: катушка сохраняет ток при любом переключении, поэтому токи «до» и «после» сшиваются через неё, а запасённая к моменту размыкания энергия $LI_0^2/2$ целиком выделяется на резисторе.

Ответ. 1) $I_{R0} = \dfrac{\mathcal{E}}{R+r}$; 2) $I_0 = \dfrac{\mathcal{E}}{R+2r}$; 3) $Q = \dfrac{L\mathcal{E}^2}{2(R+2r)^2}$.