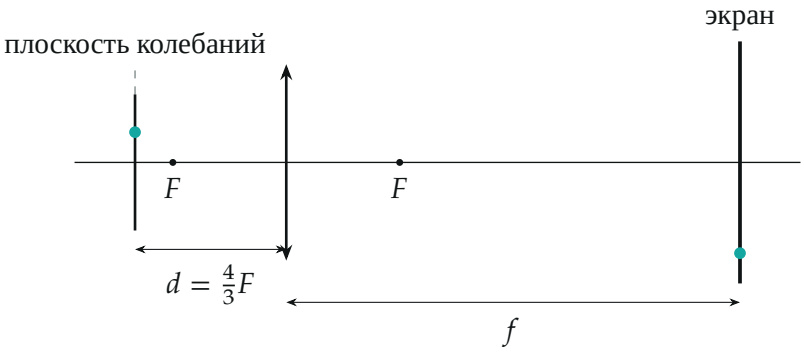
Колеблющийся шарик и его изображение

Задача 5. [Физтех 2010/11, 11 класс, задача 5] Шарик на нити длиной $l = 40$ см совершает малые колебания в поле тяжести Земли в вертикальной плоскости с угловой амплитудой $\alpha_0 = 0{,}1$. Размеры шарика малы по сравнению с длиной нити. Плоскость колебаний шарика перпендикулярна главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 15$ см и находится на расстоянии $4F/3$ от линзы. Шарик движется вблизи оси линзы. На экране получено изображение колеблющегося шарика.

1. На каком расстоянии от линзы находится экран?
2. Во сколько раз расстояние между крайними положениями изображения больше расстояния между крайними положениями шарика?
3. Найдите максимальную угловую скорость Ω_0 шарика.
4. Найдите скорость изображения в те моменты, когда нить составляет угол $4\alpha_0/5$ с вертикалью.

Указание: при малых углах α можно считать, что $\sin\alpha \approx \alpha$, $\cos\alpha \approx 1 - \dfrac{\alpha^2}{2}$. Принять $g = 10$ м/с^2.



Поясняющий рисунок (вид сбоку): шарик колеблется в плоскости, перпендикулярной главной оптической оси; изображение на экране за линзой.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача соединяет две темы: тонкую линзу и малые колебания математического маятника. Все точки шарика лежат в одной плоскости, перпендикулярной оси, на расстоянии d от линзы; изображение такой плоскости — тоже плоскость, перпендикулярная оси, а любое смещение в ней увеличивается в $\Gamma = f/d$ раз. Поэтому и размах изображения, и его скорость — это размах и скорость шарика, умноженные на Г. Скорость шарика при заданном угле даёт закон сохранения энергии (или гармонический закон движения).

Обозначения. $d = \frac{4}{3}F$ — расстояние от плоскости колебаний до линзы, f — от линзы до экрана, Г — поперечное увеличение; α — угол нити с вертикалью, $\Omega = \dot{\alpha}$ — угловая скорость нити, $\omega = \sqrt{g/l}$ — циклическая частота малых колебаний; v и $v_{\text{из}}$ — скорости шарика и изображения.

Пункт 1. Положение экрана. Формула тонкой собирающей линзы для действительного изображения:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{3}{4F} = \frac{1}{4F} \quad \Rightarrow \quad f = 4F = 60 \text{ см}.$$

Изображение действительное ($d > F$), его и ловят на экран.

Пункт 2. Увеличение. Поперечное увеличение тонкой линзы — отношение расстояний (подобные треугольники, образованные лучом через оптический центр, рис. 1):

$$\Gamma = \frac{f}{d} = \frac{4F}{\frac{4}{3}F} = 3.$$

Крайние положения шарика лежат в плоскости колебаний, их изображения — в плоскости экрана, поэтому расстояние между крайними положениями изображения в 3 раза больше (изображение перевёрнуто, но расстояния от этого не меняются).

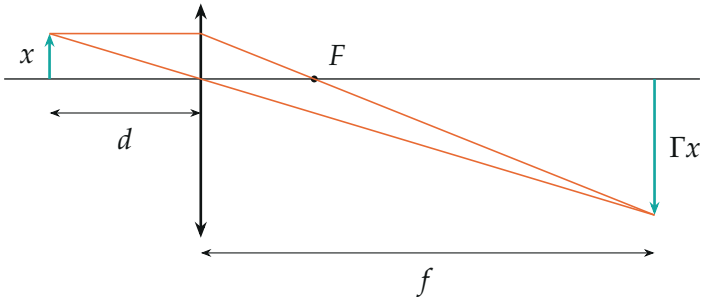


Рис. 1. Ход лучей ($d = 20$ см, $f = 60$ см в масштабе; смещение шарика x увеличено для наглядности): луч через центр линзы даёт подобные треугольники, $\Gamma = f/d = 3$.

Пункт 3. Максимальная угловая скорость. Второй закон Ньютона для шарика в проекции на касательную к дуге: $ml\ddot{\alpha} = -mg\sin\alpha \approx -mg\alpha$, то есть $\ddot{\alpha} = -\omega^2\alpha$, $\omega = \sqrt{g/l}$. Решение — гармонические колебания угла (рис. 2):

$$\alpha(t) = \alpha_0\cos\omega t, \qquad \Omega(t) = \dot{\alpha} = -\alpha_0\omega\sin\omega t.$$

Максимум модуля — при прохождении нижней точки:

$$\Omega_0 = \alpha_0\omega = \alpha_0\sqrt{\frac{g}{l}} = 0{,}1\cdot\sqrt{\frac{10}{0{,}4}}\ \text{с}^{-1} = 0{,}5\ \text{с}^{-1}.$$

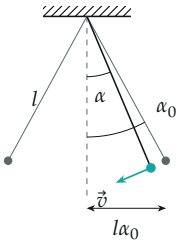


Рис. 2. Маятник в плоскости колебаний (углы преувеличены): крайние положения при $\pm\alpha_0$, текущее положение при угле α; скорость шарика направлена по касательной.

Пункт 4. Скорость изображения. *Скорость шарика.* Закон сохранения механической энергии шарика (сила натяжения работы не совершает) между крайним положением и положением с углом α:

$$mgl(1-\cos\alpha_0) = mgl(1-\cos\alpha) + \frac{mv^2}{2}.$$

С $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$: $v^2 = gl(\alpha_0^2 - \alpha^2)$, то есть $v = \sqrt{gl}\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}$. При $\alpha = \frac{4}{5}\alpha_0$:

$$\sqrt{\alpha_0^2 - \tfrac{16}{25}\alpha_0^2} = \frac{3}{5}\alpha_0 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{3}{5}\alpha_0\sqrt{gl} = \frac{3}{5}\cdot 0{,}1\cdot\sqrt{10\cdot 0{,}4}\ \text{м/с} = 0{,}12\ \text{м/с}.$$

На рис. 3 видно, что скорость при этом угле — ровно $3/5$ максимальной.

Скорость изображения. Шарик движется в плоскости, перпендикулярной оси, на неизменном расстоянии d от линзы. Каждое смещение шарика $\Delta\vec{r}$ (и по горизонтали, и по вертикали) изображение повторяет с множителем Γ и с обратным знаком. Поделив на малое время Δt, получим $|\vec{v}_{\text{из}}| = \Gamma v$:

$$v_{\text{из}} = \Gamma\cdot\frac{3}{5}\alpha_0\sqrt{gl} = 3\cdot 0{,}12\ \text{м/с} = 0{,}36\ \text{м/с} = 36\ \text{см/с}.$$

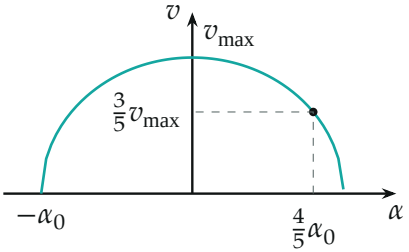


Рис. 3. Скорость шарика в зависимости от угла: $v = \sqrt{gl}\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}$ — половина эллипса; при $\alpha = \frac{4}{5}\alpha_0$ получается $\frac{3}{5}v_{\max}$ (египетский треугольник 3–4–5).

Обратите внимание. «Угловая скорость шарика» — это скорость изменения угла нити $\dot{\alpha}$, а не циклическая частота $\omega = 5\,\text{с}^{-1}$: максимальная Ω_0 в α_0 раз меньше ω.

Ответ.

$$f = 4F = 60\text{ см};\quad \Gamma = 3;\quad \Omega_0 = \alpha_0\sqrt{\frac{g}{l}} = 0{,}5\text{ с}^{-1};\quad v_{\text{из}} = \frac{3}{5}\Gamma\alpha_0\sqrt{gl} = 36\text{ см}$$

Проверка. Размерности: $\sqrt{g/l}$ — с^{-1}, $\sqrt{gl}$ — м/с. Второй способ для пункта 4: из $\alpha = \alpha_0\cos\omega t$ при $\cos\omega t = \frac{4}{5}$ имеем $|\sin\omega t| = \frac{3}{5}$, и $v = l|\Omega| = l\alpha_0\omega\cdot\frac{3}{5} = \frac{3}{5}\alpha_0\sqrt{gl}$ — то же. Шарик действительно движется «вблизи оси»: размах $2l\alpha_0 = 8$ см, у изображения — 24 см.

Смысл: линза равномерно растягивает всё, что происходит в плоскости колебаний, в $f/d = 3$ раза — и расстояния, и скорости; остаётся найти движение самого маятника.

Ответ. 1) $f = 4F = 60$ см; 2) в $\Gamma = 3$ раза; 3) $\Omega_0 = \alpha_0\sqrt{\frac{g}{l}} = 0{,}5\text{ с}^{-1}$; 4) $v_{\text{из}} = \frac{3}{5}\Gamma\alpha_0\sqrt{gl} = 36$ см/с.