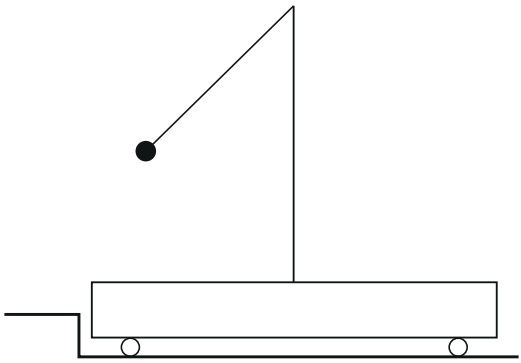
Шар на нити на платформе у упора

Задача 1. [Физтех 2010/11, 11 класс, задача 1] На горизонтальной поверхности стола находятся платформа с укреплённым на ней штативом. К штативу привязан на нити длиной l небольшой по сравнению с длиной нити шар. Масса платформы со штативом m, масса шара $2m$. Шар отклоняют и удерживают неподвижно так, что нить составляет угол $\varphi = 60°$ с вертикалью, а платформа прижата к упору (см. рис.). Затем шар отпускают.

1. Найдите скорость шара в момент отрыва платформы от упора.
2. Найдите максимальный угол отклонения нити от вертикали направо в процессе движения системы после отрыва от упора.

Направления всех движений параллельны одной и той же вертикальной плоскости. Массой колёс платформы пренебречь.



▲ **Решение. Что происходит.** Пока шар левее штатива, нить тянет штатив влево — к упору, и платформа стоит на месте. Шар движется по окружности, как обычный маятник. Как только шар проходит нижнюю точку и оказывается правее штатива, нить начинает тянуть штатив вправо, и платформа отрывается от упора. Дальше система «шар + платформа» движется свободно по горизонтали: горизонтальный импульс сохраняется, и шар не может подняться так же высоко, как без платформы, — часть энергии уходит в движение платформы. Задача из двух этапов: закон сохранения энергии маятника, затем законы сохранения горизонтального импульса и энергии системы.

Обозначения. Ось x — горизонтально вправо (от упора). v — скорость шара в нижней точке (момент отрыва), u — общая скорость шара и платформы в момент наибольшего отклонения, α — наибольший угол отклонения нити вправо.

1. Когда платформа отрывается. На платформу со штативом действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции стола $\vec{N}$ (вертикальна, колёса без трения), сила натяжения нити $\vec{T}$ в точке подвеса — вдоль нити к шару, и сила реакции упора $\vec{N}_{\text{уп}}$ — вправо, упор может только толкать (рис. 1). Горизонтальные силы — только T_x и $N_{\text{уп}}$. Пока платформа покоится, по второму закону Ньютона в проекции на ось x

$$N_{\text{уп}} + T_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{\text{уп}} = -T_x.$$

Пока шар левее штатива, $T_x < 0$ и $N_{\text{уп}} > 0$ — платформа прижата. В нижней точке $T_x = 0$, а сразу за ней $T_x > 0$ — нужна была бы отрицательная (тянущая) сила упора, а её не бывает. Значит, платформа отрывается, когда шар проходит нижнюю точку.

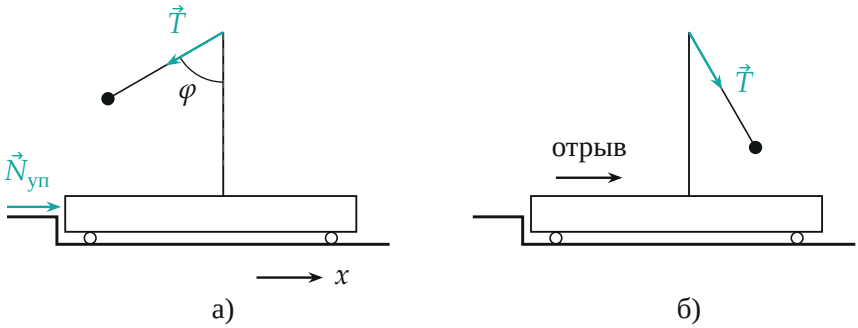


Рис. 1. а) Шар левее штатива: нить тянет штатив влево, упор отвечает силой $\vec{N}_{\text{уп}}$ вправо, платформа стоит. б) Шар правее штатива: нить тянет штатив вправо, удержать платформу упор не может — она отрывается. Вертикальные силы не показаны.

Пункт 1.

2. Закон сохранения энергии шара до нижней точки. До отрыва платформа неподвижна, поэтому точка подвеса покоится и нить работы

над шаром не совершает (она перпендикулярна скорости шара). Сила упора приложена к неподвижной платформе и тоже работы не совершает. Закон сохранения механической энергии шара от начального положения до нижней точки (рис. 2): шар опустился на $l(1-\cos\varphi)=l/2$,

$$\frac{2m\,v^2}{2}=2mg\,l\,(1-\cos\varphi)\quad\Rightarrow\quad v=\sqrt{2gl(1-\cos\varphi)}=\sqrt{gl}.$$

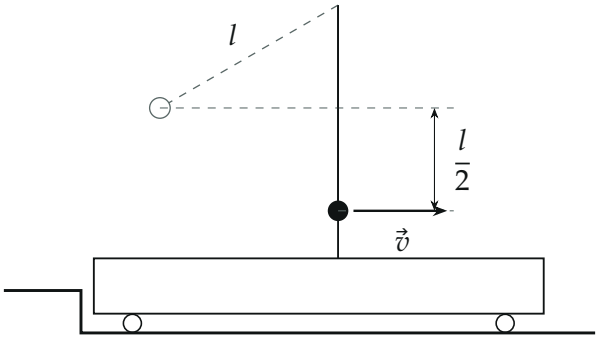


Рис. 2. Момент отрыва: шар в нижней точке, платформа ещё неподвижна. Серым — начальное положение шара, он опустился на $l(1-\cos 60^\circ)=l/2$.

Пункт 2.

3. Закон сохранения горизонтального импульса после отрыва. После отрыва горизонтальных внешних сил на систему «шар + платформа» нет (стол гладкий для колёс, упор больше не касается). Поэтому проекция импульса системы на ось x сохраняется. В момент наибольшего отклонения нити шар относительно платформы не движется — иначе угол продолжал бы меняться, — и у шара и платформы одна скорость u (рис. 3). От момента отрыва до этого момента:

$$2m\,v=(2m+m)\,u\quad\Rightarrow\quad u=\frac{2}{3}\,v.$$

4. Закон сохранения энергии системы после отрыва. Нить нерастяжима, трения нет — механическая энергия системы сохраняется. От момента отрыва (шар в нижней точке со скоростью v, платформа покоится) до наибольшего отклонения (шар поднялся на $l(1-\cos\alpha)$, все

движутся со скоростью u):

$$\frac{2m\,v^2}{2} = \frac{3m\,u^2}{2} + 2mg\,l\,(1-\cos\alpha).$$

Подставим $u = \frac{2}{3}v$: $\frac{3mu^2}{2} = \frac{2}{3}mv^2$, и

$$mv^2 - \frac{2}{3}mv^2 = 2mgl\,(1-\cos\alpha) \quad \Rightarrow \quad 1-\cos\alpha = \frac{v^2}{6gl} = \frac{1}{6},$$

$$\cos\alpha = \frac{5}{6}, \qquad \alpha = \arccos\frac{5}{6} \approx 33{,}6^\circ.$$

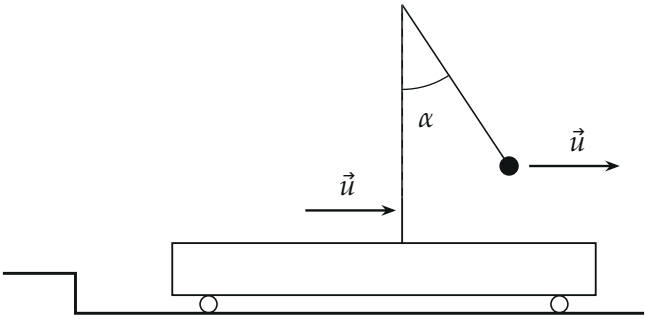


Рис. 3. Наибольшее отклонение нити вправо: шар и платформа движутся с одной скоростью $\vec{u}$, платформа уже ушла от упора. Угол α — в масштабе, $\cos\alpha = 5/6$.

5. Второй способ — в системе центра масс. После отрыва центр масс системы движется равномерно со скоростью $v_C = 2mv/(3m) = \frac{2}{3}v$. Кинетическая энергия, которая может перейти в потенциальную, — это энергия движения относительно центра масс, $\frac{\mu v_{\text{отн}}^2}{2}$ с приведённой массой $\mu = \frac{2m\cdot m}{3m} = \frac{2}{3}m$ и относительной скоростью $v_{\text{отн}} = v$:

$$\frac{\frac{2}{3}m\,v^2}{2} = 2mgl\,(1-\cos\alpha) \quad \Rightarrow \quad 1-\cos\alpha = \frac{v^2}{6gl} = \frac{1}{6}.$$

То же.

Обратите внимание. Импульс системы сохраняется только после отрыва: до него упор действует на платформу горизонтальной силой. И угол α меньше начальных 60°: энергия $\frac{2}{3}mv^2$ остаётся в движении системы как целого.

Ответ.

$$v = \sqrt{2gl(1-\cos\varphi)} = \sqrt{gl}; \qquad \cos\alpha = 1 - \frac{v^2}{6gl} = \frac{5}{6}$$

Проверка. Размерность: $\sqrt{gl}$ — скорость; $\cos\alpha$ — безразмерен. Предел: при бесконечно тяжёлой платформе импульс её не сдвинет, и шар поднялся бы на исходную высоту $\cos\alpha = \cos 60°$; при массе платформы M в общем виде $1-\cos\alpha = \frac{M}{M+2m}(1-\cos\varphi)$, при $M = m$ это $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ — совпадает. Второй способ (пункт 5) дал то же.

Смысл: упор работает как «стенка» только полпериода; после отрыва часть энергии маятника навсегда уходит в поступательное движение платформы, поэтому вправо шар отклоняется меньше, чем был отклонён влево.

Ответ. 1) $v = \sqrt{gl}$; 2) $\cos\alpha = \frac{5}{6}$, $\alpha = \arccos\frac{5}{6} \approx 33{,}6°$.