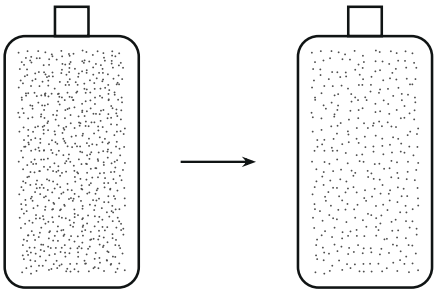
Газ из баллона

Задача 2. [Физтех 2010/11, 11 класс, задача 2] Из баллона со сжатым газом израсходовали часть газа. Известно, что давление в баллоне уменьшилось в 3 раза, отношение начальной и конечной масс баллона с газом равно $5/4$, отношение начальной и конечной температур (по шкале Кельвина) равно $11/10$. Какую часть от начальной массы баллона с газом составляет начальная масса газа?



Поясняющий рисунок: баллон до и после того, как израсходовали часть газа. Объём баллона не меняется.

▲ **Решение. Что происходит.** Масса «баллон с газом» складывается из постоянной массы оболочки и массы газа, а убыль массы — это израсходованный газ. Масса газа в баллоне постоянного объёма по уравнению состояния пропорциональна p/T, поэтому из данных о давлении и температуре сразу получаем, какая доля газа осталась. Остаётся связать это с отношением полных масс.

Обозначения. M — масса пустого баллона, m_1 и m_2 — масса газа до и после, V — объём баллона, μ — молярная масса газа, p и T — начальные давление и температура; конечные — $p/3$ и $\frac{10}{11}T$. Искомое $x = \dfrac{m_1}{M + m_1}$.

1. Какая доля газа осталась. Уравнение Менделеева — Клапейрона

для газа в баллоне до и после (объём V один и тот же):

$$pV = \frac{m_1}{\mu}RT, \qquad \frac{p}{3}V = \frac{m_2}{\mu}R\frac{10}{11}T.$$

Разделим второе на первое — V, μ, R сократятся:

$$\frac{1}{3} = \frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{10}{11} \quad\Rightarrow\quad \frac{m_2}{m_1} = \frac{11}{30}.$$

Масса газа пропорциональна p/T (рис. 1): давление упало втрое, но и температура немного снизилась, поэтому газа осталось чуть больше трети.

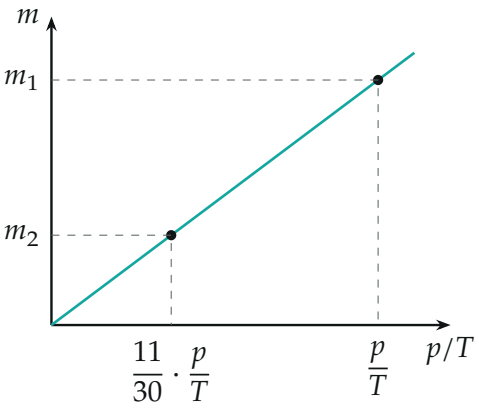


Рис. 1. Масса газа в баллоне постоянного объёма пропорциональна p/T; конечное p/T составляет $\frac{1}{3}\cdot\frac{11}{10} = \frac{11}{30}$ начального (масштаб соблюдён).

2. Израсходованный газ — через полные массы. Масса баллона M не меняется, поэтому разность полных масс — это масса израсходованного газа. По условию $\dfrac{M+m_1}{M+m_2} = \dfrac{5}{4}$, то есть $M + m_2 = \frac{4}{5}(M + m_1)$, и

$$m_1 - m_2 = (M + m_1) - (M + m_2) = \frac{1}{5}(M + m_1).$$

Израсходовали пятую часть начальной полной массы.

3. Доля газа. С другой стороны, по пункту 1 израсходовано $m_1 - m_2 = (1 - \frac{11}{30})m_1 = \frac{19}{30}\,m_1$. Приравняем:

$$\frac{19}{30}\,m_1 = \frac{1}{5}\,(M + m_1) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{m_1}{M + m_1} = \frac{30}{5 \cdot 19} = \frac{6}{19}.$$

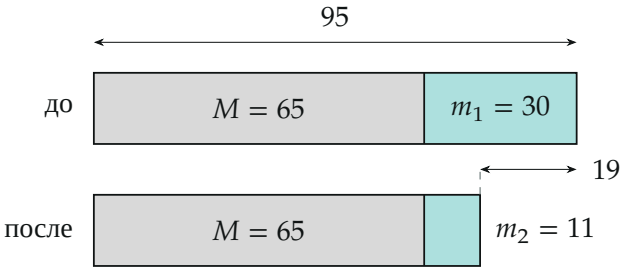


Рис. 2. Массы в условных единицах: баллон 65, газ 30 до и 11 после. Израсходовано 19 из 95 — ровно пятая часть, полные массы относятся как $95 : 76 = 5 : 4$.

4. Проверка числами. Возьмём $M + m_1 = 95$ условных единиц (рис. 2): тогда $m_1 = \frac{6}{19} \cdot 95 = 30$, $M = 65$, $m_2 = \frac{11}{30} \cdot 30 = 11$, $M + m_2 = 76$. Отношение полных масс $95/76 = 5/4$, давлений при $p \propto mT$: $\dfrac{30 \cdot 11}{11 \cdot 10} = 3$ — все три условия выполнены.

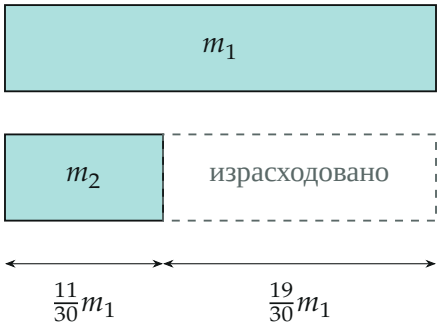


Рис. 3. Газ в баллоне: осталось $\frac{11}{30}$ *начальной массы, израсходовано* $\frac{19}{30}$.

Обратите внимание. Отношение $5/4$ — это отношение масс баллона *вместе с газом*, а не масс газа; если принять его за m_1/m_2, уравнение состояния окажется несовместным с данными о давлении и температуре ($m_1/m_2 = 30/11$, а не $5/4$).

Ответ.

$$\boxed{x = \frac{m_1}{M + m_1} = \frac{1 - \frac{4}{5}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{11}{10}} = \frac{6}{19}}$$

Проверка. Величина безразмерна и меньше единицы, как и должно быть для доли. Общий вид $x = \dfrac{1 - k_M}{1 - k_m}$, где $k_M = \frac{4}{5}$ — доля оставшейся полной массы, $k_m = \frac{11}{30}$ — доля оставшегося газа. Предел: если бы баллон был невесомым ($M = 0$), обе доли совпали бы и $x = 1$. Подстановка чисел (пункт 4) выполняет все условия.

Смысл: уменьшение полной массы целиком приходится на газ, а уравнение состояния говорит, какую долю газа это составляет; деля одно на другое, получаем, сколько газа было в начале.

Ответ. $\dfrac{m_1}{M + m_1} = \dfrac{6}{19}$.