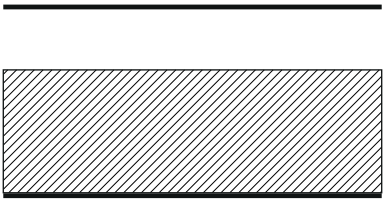
Диэлектрическая пластина в конденсаторе под напряжением

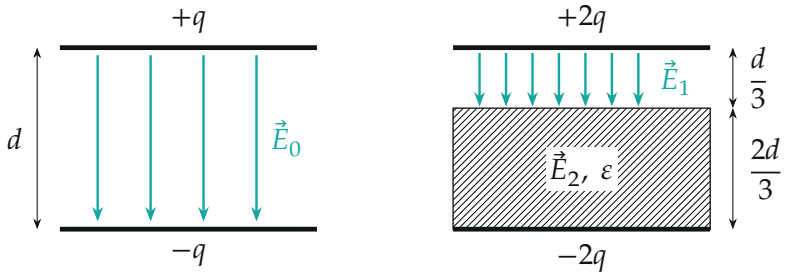
Задача 3. [Физтех 2010/11, 11 класс, задача 3] Плоский конденсатор подключён к источнику постоянного напряжения. Не отключая источника, в конденсатор вставляют пластину из диэлектрика (см. рис.), толщина которой равна $2/3$ от расстояния между пластинами конденсатора (диэлектрик заполняет $2/3$ объёма конденсатора), из-за чего заряд на пластинах конденсатора увеличивается в два раза.

1. Во сколько раз и как изменилась напряжённость электрического поля внутри конденсатора в области без диэлектрика?
2. Найдите диэлектрическую проницаемость ε материала диэлектрической пластины.



▲ **Решение. Что происходит.** Источник не отключён, поэтому напряжение U между пластинами всё время одно и то же. Диэлектрик ослабляет поле внутри себя в ε раз, на нём падает меньшая часть напряжения, и чтобы общее напряжение осталось прежним, источник досылает на пластины заряд — поле в воздушном зазоре растёт. Задача на связь поля с зарядом пластин и напряжения с полем (поле однородно в каждом слое); второй способ — два последовательных конденсатора.

Обозначения. d — расстояние между пластинами, S — площадь пластины, q и $\sigma = q/S$ — начальный заряд и его поверхностная плотность, E_0 — начальная напряжённость (без диэлектрика), E_1 — напряжённость в воздушном зазоре после, E_2 — в диэлектрике после. Ось x — от нижней пластины к верхней (рис. 1).



а) до б) после

Рис. 1. Поле в конденсаторе до и после того, как вставили диэлектрик. Густота линий в воздушном зазоре удвоилась вместе с зарядом пластин.

Пункт 1.

1. Поле в воздушном зазоре определяется зарядом пластин. Поле бесконечных пластин с плотностью заряда $\pm\sigma$ в вакууме между ними $E = \sigma/\varepsilon_0$. Пластина диэлектрика параллельна обкладкам; связанные заряды на её поверхностях создают поле только внутри самой пластины (это тоже пара заряженных плоскостей), а снаружи — в воздушном зазоре — их поля взаимно гасятся. Поэтому в зазоре

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \qquad E_1 = \frac{2\sigma}{\varepsilon_0} = 2E_0.$$

Напряжённость в области без диэлектрика *увеличилась в 2 раза*.

Пункт 2.

2. Напряжение до и после. В каждом слое поле однородно, напряжение — сумма произведений поля на толщину слоя. В диэлектрике поле в ε раз меньше, чем в зазоре: $E_2 = E_1/\varepsilon$. Источник держит напряжение постоянным:

$$U = E_0\, d = E_1 \cdot \frac{d}{3} + \frac{E_1}{\varepsilon} \cdot \frac{2d}{3}.$$

Подставим $E_1 = 2E_0$ и сократим на $E_0 d$:

$$1 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3\varepsilon} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = 4.$$

На воздушном зазоре теперь $E_1 d/3 = \frac{2}{3}U$, на диэлектрике — $\frac{1}{3}U$

(рис. 2).

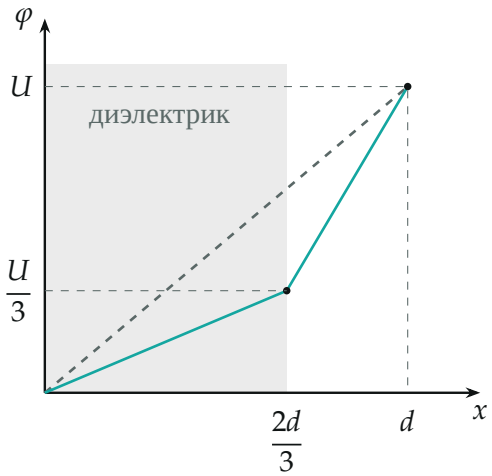


Рис. 2. Потенциал поперёк конденсатора (нижняя пластина — ноль): серым пунктиром — до, бирюзовым — после. Наклон — напряжённость: в диэлектрике $E_0/2$, в зазоре $2E_0$. Построено при $\varepsilon = 4$.

3. Второй способ — два последовательных конденсатора. Граница диэлектрика параллельна пластинам, её можно мысленно заменить тонкой проводящей плёнкой — поле от этого не изменится. Получаются два последовательно соединённых конденсатора (рис. 3): воздушный с зазором $d/3$ и заполненный диэлектриком с зазором $2d/3$. С $C_0 = \varepsilon_0 S/d$:

$$C_\text{в} = 3C_0, \qquad C_\text{д} = \frac{3\varepsilon}{2}C_0, \qquad \frac{1}{C} = \frac{1}{3C_0} + \frac{2}{3\varepsilon C_0}.$$

При неизменном U заряд вырос вдвое, значит, ёмкость вдвое выросла, $C = 2C_0$:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3\varepsilon} = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = 4.$$

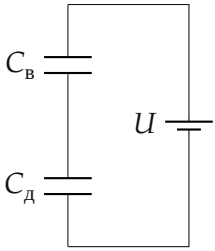


Рис. 3. Эквивалентная схема: слой диэлектрика и воздушный зазор — два последовательных конденсатора с одним и тем же зарядом $2q$.

Обратите внимание. В конденсаторе, отключённом от источника, сохранялся бы заряд, и поле в зазоре не изменилось бы; здесь сохраняется напряжение, и поле в зазоре растёт вместе с зарядом.

Ответ.

$$\frac{E_1}{E_0} = 2 \text{ (увеличилась)}; \qquad \varepsilon = \frac{4}{3\,(1-2/3)} = 4$$

Проверка. Предел: при $\varepsilon \to 1$ (диэлектрика нет) уравнение пункта 2 дало бы $E_1 = E_0$ — заряд не изменился бы; при $\varepsilon \to \infty$ (пластина как металл) зазор сжимается до $d/3$, и заряд вырос бы втрое. Удвоение — между этими крайностями, $\varepsilon = 4$ разумно. Второй способ (пункт 3) дал то же.

Смысл: при постоянном напряжении поле в воздушной части определяется зарядом обкладок, а диэлектрик «забирает» лишь треть напряжения, поэтому заряд и поле в зазоре растут.

Ответ. 1) увеличилась в 2 раза; 2) $\varepsilon = 4$.