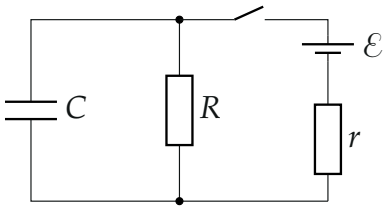
Переходные токи в цепи с конденсатором

Задача 4. [Физтех 2010/11, 11 класс, задача 4] В схеме, показанной на рисунке, все элементы можно считать идеальными, параметры элементов указаны на рисунке. До замыкания ключа ток в цепи отсутствовал. Ключ замыкают на некоторое время, а затем размыкают. Оказалось, что величина тока через конденсатор непосредственно перед размыканием ключа и сразу после размыкания ключа одинакова.

1. Найдите ток через конденсатор сразу после замыкания ключа.
2. Найдите напряжение на конденсаторе сразу после размыкания ключа.
3. Какое количество теплоты выделилось в цепи после размыкания ключа?



▲ **Решение. Что происходит.** После замыкания ключа источник заряжает конденсатор; напряжение на нём растёт от нуля к установившемуся значению, при котором ток через конденсатор прекратился бы. Ключ размыкают раньше. После размыкания источник отключён, и конденсатор разряжается через резистор R, отдавая ему всю свою энергию. Главная идея: напряжение на конденсаторе не может измениться скачком, поэтому в момент размыкания оно одно и то же «до» и «после» — это и связывает два режима. Задача на правила Кирхгофа в моменты коммутации и закон сохранения энергии.

Обозначения. U — напряжение на конденсаторе, I_C — ток через конденсатор, I_R — ток через резистор R, I — ток через источник и резистор r; U_0 — напряжение на конденсаторе в момент размыкания.

Пункт 1.

1. Сразу после замыкания. Конденсатор не заряжен, $U = 0$, а заряд и напряжение на конденсаторе скачком не меняются. Резистор R подключён параллельно конденсатору, напряжение на нём тоже нулевое, и по закону Ома $I_R = 0$. Весь ток источника идёт через конденсатор (рис. 1). Закон Ома для контура «источник — r — конденсатор»:

$$\mathcal{E} = Ir + U = Ir \quad \Rightarrow \quad I_{C0} = I = \frac{\mathcal{E}}{r}.$$

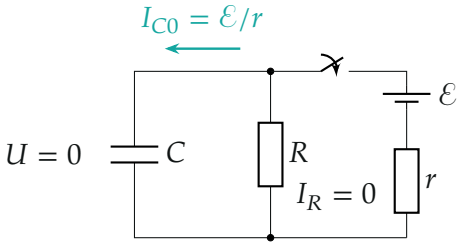


Рис. 1. Сразу после замыкания: незаряженный конденсатор ведёт себя как проводник, ток через R равен нулю.

Пункт 2.

2. Непосредственно перед размыканием. Напряжение на конденсаторе U_0, на резисторе R (он параллелен конденсатору) тоже U_0. Закон Ома для участков и первое правило Кирхгофа для верхнего узла (рис. 2):

$$I = \frac{\mathcal{E} - U_0}{r}, \qquad I_R = \frac{U_0}{R}, \qquad I_C = I - I_R = \frac{\mathcal{E} - U_0}{r} - \frac{U_0}{R}.$$

Ток I_C заряжает конденсатор.

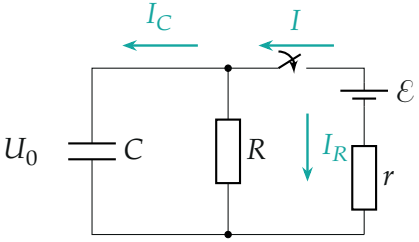


Рис. 2. Перед размыканием: ток источника I делится в верхнем узле на ток зарядки конденсатора I_C и ток через R.

3. Сразу после размыкания. Ветвь с источником разорвана. Напряжение на конденсаторе за мгновение не изменилось, оно U_0, и конденсатор разряжается через R (рис. 3):

$$I'_C = I'_R = \frac{U_0}{R}.$$

Ток через конденсатор сменил направление (теперь разряжает его), но по условию его величина та же:

$$\frac{\mathcal{E} - U_0}{r} - \frac{U_0}{R} = \frac{U_0}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathcal{E} - U_0}{r} = \frac{2U_0}{R} \quad \Rightarrow \quad U_0 = \frac{\mathcal{E}R}{R + 2r}.$$

Это меньше установившегося напряжения $\frac{\mathcal{E}R}{R+r}$, к которому конденсатор шёл бы при замкнутом ключе (рис. 4), — значит, такой момент действительно наступает.

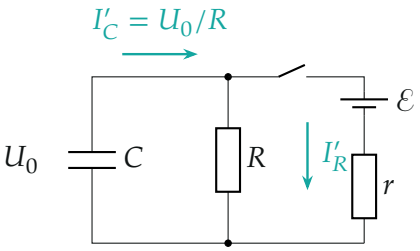


Рис. 3. Сразу после размыкания: источник отключён, конденсатор разряжается через R, ток через него сменил направление.

Пункт 3.

4. Теплота после размыкания. После размыкания цепь — конденсатор и резистор R; ток идёт, пока конденсатор полностью не разрядится. Источника в цепи нет, катушек нет, поэтому по закону сохранения энергии вся энергия конденсатора переходит в теплоту в резисторе R:

$$Q = \frac{CU_0^2}{2} = \frac{C}{2}\left(\frac{\mathcal{E}R}{R + 2r}\right)^2.$$

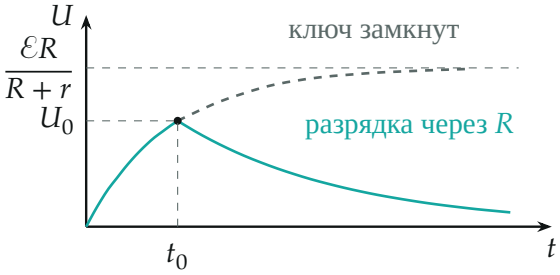


Рис. 4. Напряжение на конденсаторе (построено при $R = r$): зарядка до момента t_0, когда $U = U_0 = \mathcal{E}/3$, затем разрядка через R. Серым пунктиром — как шла бы зарядка, если ключ не размыкать.

Обратите внимание. Ток через конденсатор при размыкании может измениться скачком (здесь — сменил направление), а напряжение на нём — нет. Именно непрерывность U связывает режимы «до» и «после». Равенство токов — по величине: по направлению они противоположны, а равенство с учётом знака дало бы $U_0 = \mathcal{E}$, что недостижимо.

Ответ.

$$I_{C0} = \frac{\mathcal{E}}{r}; \qquad U_0 = \frac{\mathcal{E}R}{R+2r}; \qquad Q = \frac{CU_0^2}{2} = \frac{C}{2}\left(\frac{\mathcal{E}R}{R+2r}\right)^2$$

Проверка. Размерности: ЭДС на сопротивление — ток; U_0 — ЭДС, умноженная на безразмерную дробь; CU^2 — энергия. Пределы: при $R \to \infty$ получаем $U_0 \to \mathcal{E}$ — разряжаться не через что, ток после размыкания нулевой, значит, и до размыкания ток зарядки нулевой, а это конец зарядки, $U = \mathcal{E}$. При $r \to 0$ тоже $U_0 \to \mathcal{E}$: идеальный источник заряжает конденсатор до $\mathcal{E}$ мгновенно. Подстановка при $R = r$: $U_0 = \mathcal{E}/3$, ток до размыкания $\frac{2\mathcal{E}/3}{r} - \frac{\mathcal{E}/3}{r} = \frac{\mathcal{E}}{3r}$, после — $\frac{\mathcal{E}/3}{r}$, равны.

Смысл: «одинаковый ток до и после» — это условие, что ток зарядки сравнялся с током, который сам конденсатор будет гнать через R; это происходит при напряжении $\frac{\mathcal{E}R}{R+2r}$, и всю энергию, накопленную к этому моменту, конденсатор потом отдаёт в тепло.

Ответ. 1) $I_{C0} = \frac{\mathcal{E}}{r}$; 2) $U_0 = \frac{\mathcal{E}R}{R+2r}$; 3) $Q = \frac{C}{2}\left(\frac{\mathcal{E}R}{R+2r}\right)^2$.