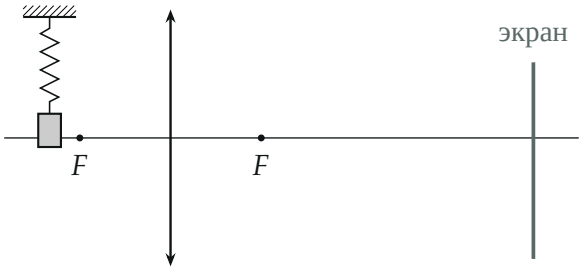
Груз на пружине и изображение на экране

Задача 5. [Физтех 2010/11, 11 класс, задача 5] Груз совершает колебания с амплитудой A и периодом T вдоль вертикали на упругой пружине. Масса пружины намного меньше массы груза. Груз находится на расстоянии $4F/3$ от тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием F, вблизи её главной оптической оси, которая горизонтальна. На экране получено изображение колеблющегося груза.

1. На каком расстоянии от линзы находится экран?
2. С какой амплитудой колеблется изображение?
3. Найдите максимальную скорость груза.
4. Найдите скорость изображения в те моменты, когда смещение груза от положения равновесия равно $2A/3$.



Поясняющий рисунок: груз на пружине колеблется вертикально на расстоянии $4F/3$ от линзы, изображение — на экране.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Изображение на экране действительное: груз стоит дальше фокуса. Груз движется поперёк оптической оси, расстояние до линзы не меняется, поэтому увеличение Г постоянно, и изображение повторяет колебания груза в Г раз крупнее и в противофазе: амплитуда, скорость — всё умножается на Г. Сам груз совершает гармонические колебания. Задача на формулу тонкой линзы и кинематику гармонических колебаний.

Обозначения. $d = \frac{4}{3}F$ — расстояние от груза до линзы, f — от линзы до экрана, $\Gamma = f/d$ — поперечное увеличение; y — смещение груза от

положения равновесия (оно на оптической оси или рядом с ней), y' — смещение изображения; $\omega = 2\pi/T$ — циклическая частота.

Пункт 1.

1. Положение экрана. Формула тонкой собирающей линзы для действительного изображения:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{3}{4F} = \frac{1}{4F} \quad \Rightarrow \quad f = 4F.$$

Экран — на расстоянии $4F$ за линзой (рис. 1).

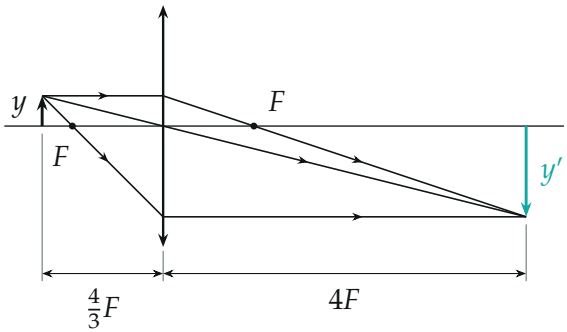


Рис. 1. Ход лучей от верхней точки груза (в масштабе): изображение на расстоянии $4F$, перевёрнуто и втрое крупнее, $y' = -3y$.

Пункт 2.

2. Амплитуда изображения. Луч через оптический центр не преломляется, поэтому из подобия треугольников (рис. 1)

$$y' = -\frac{f}{d}\,y = -\Gamma y, \qquad \Gamma = \frac{4F}{4F/3} = 3.$$

Γ не меняется во время колебаний, значит, изображение колеблется в противофазе с грузом с амплитудой

$$A_{\text{из}} = \Gamma A = 3A$$

(рис. 2). Груз отходит от оси не дальше, чем на A — «вблизи оси», и формула линзы применима.

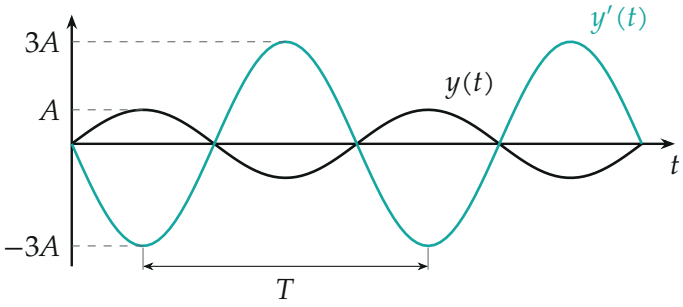


Рис. 2. Смещение груза $y(t)$ (чёрный) и изображения $y'(t) = -3y(t)$ (бирюзовый): та же частота, втрое большая амплитуда, противофаза.

Пункт 3.

3. Максимальная скорость груза. Груз на лёгкой пружине совершает гармонические колебания:

$$y = A\sin\omega t, \qquad v = \dot{y} = A\omega\cos\omega t, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Максимум $|\cos\omega t| = 1$ — в положении равновесия:

$$v_m = A\omega = \frac{2\pi A}{T}.$$

Пункт 4.

4. Скорость груза при смещении $2A/3$**.** Из $y = A\sin\omega t$ и $v = A\omega\cos\omega t$: $\sin^2 + \cos^2 = 1$ даёт связь скорости и смещения в любой момент

$$\frac{y^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2\omega^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad |v| = \omega\sqrt{A^2 - y^2}.$$

При $y = \frac{2}{3}A$:

$$|v| = \omega\sqrt{A^2 - \frac{4}{9}A^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}A\omega = \frac{2\sqrt{5}\,\pi A}{3T}.$$

Это точка на эллипсе «скорость — смещение» (рис. 3). Тот же резуль-

тат даёт закон сохранения энергии для колебаний: $\frac{mv^2}{2} + \frac{ky^2}{2} = \frac{kA^2}{2}$ с $k/m = \omega^2$ — смещение отсчитано от положения равновесия, так что сила тяжести учтена.

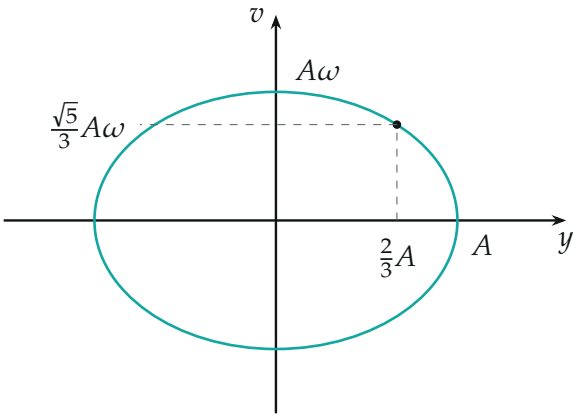


Рис. 3. Скорость груза в зависимости от смещения — эллипс с полуосями A и $A\omega$; отмечена точка $y = \frac{2}{3}A$ (масштаб соблюдён, единица по вертикали — $A\omega$).

5. Скорость изображения. Из $y' = -\Gamma y$ при постоянном Γ: $v' = -\Gamma v$. Значит, по модулю

$$v_{\text{из}} = \Gamma\,|v| = 3 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}\,A\omega = \sqrt{5}\,A\,\frac{2\pi}{T} = \frac{2\sqrt{5}\,\pi A}{T}.$$

Обратите внимание. Смещение $\frac{2}{3}A$ — это смещение груза, а не изображения: изображение в этот момент смещено на $2A$. Если по ошибке подставить $\frac{2}{3}A$ как смещение изображения в $\omega\sqrt{(3A)^2 - y'^2}$, получится другое число.

Ответ.

$$f = 4F, \qquad A_{\text{из}} = \frac{f}{d}\,A = 3A, \qquad v_m = \frac{2\pi A}{T},$$
$$v_{\text{из}} = \frac{f}{d} \cdot \frac{2\pi}{T}\sqrt{A^2 - \left(\frac{2A}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}\,\pi A}{T}$$

Проверка. Размерности: A/T — скорость. Второй способ для пункта 4 — прямо через изображение: оно колеблется с амплитудой $3A$ и той же частотой, смещение $2A$, $v_{из} = \omega\sqrt{(3A)^2 - (2A)^2} = \sqrt{5}A\omega$ — то же. Предел: при $y = 0$ получили бы $v_{из} = 3v_m$, при $y = A$ — ноль, как и в крайних точках.

Смысл: линза «растягивает» колебания груза в три раза — и смещения, и скорости, а связь скорости со смещением в гармоническом колебании одинакова для груза и для его изображения.

Ответ. 1) $f = 4F$; 2) $A_{из} = 3A$; 3) $v_m = \dfrac{2\pi A}{T}$; 4) $v_{из} = \dfrac{2\sqrt{5}\,\pi A}{T}$.