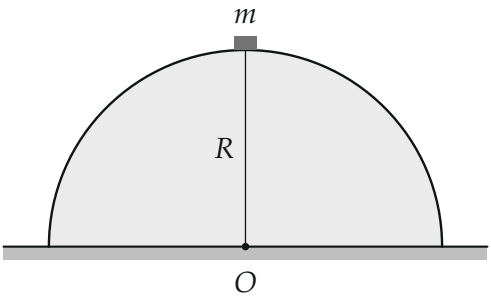
# Шайба на гладком полушаре

**Задача 1.** [Физтех 2011/12, 11 класс, задача 1] Небольшая шайба массой $m$ соскальзывает без начальной скорости с вершины гладкого закреплённого полушара. С какой силой действует шайба на полушар в момент, когда касательная составляющая ускорения шайбы равна $a_\tau = \frac{3}{5}g$?




*Поясняющий рисунок. Шайба в начальный момент на вершине неподвижного гладкого полушара радиуса $R$.*

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на движение по окружности: шайба скользит по поверхности полушара, пока не оторвётся. Касательное ускорение даёт только сила тяжести — по нему находим, где шайба. Скорость в этой точке — из закона сохранения энергии, а сила реакции — из второго закона Ньютона в проекции на радиус. Сила давления шайбы на полушар по третьему закону Ньютона равна реакции.

**Обозначения.** $R$ — радиус полушара, $\alpha$ — угол между радиусом, проведённым к шайбе, и вертикалью, $v$ — скорость шайбы, $N$ — сила реакции полушара. Ось $n$ — вдоль радиуса к центру $O$, ось $\tau$ — по касательной, в сторону движения (рис. 1).

**1. Положение шайбы — второй закон Ньютона в проекции на касательную.** На шайбу действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции $\vec{N}$ (рис. 1); трения нет. Векторно $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$. Реакция направлена по радиусу и на ось $\tau$ проекции не даёт — поэтому эта ось сразу даёт угол:

$$ma_\tau = mg\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{a_\tau}{g} = \frac{3}{5}, \qquad \cos\alpha = \frac{4}{5}.$$

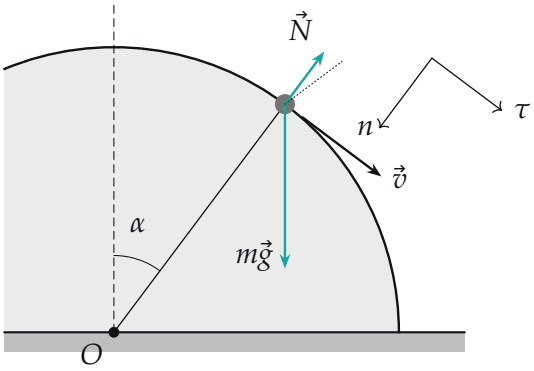



*Рис. 1. Силы, действующие на шайбу, и оси: $n$ — к центру полушара, $\tau$ — по касательной вниз (посчитано для $\sin\alpha = 3/5$).*

**2. Скорость — закон сохранения механической энергии.** Поверхность гладкая, реакция перпендикулярна скорости и работы не совершает — механическая энергия сохраняется. Шайба опустилась на $R - R\cos\alpha$:

$$\frac{mv^2}{2} = mgR(1-\cos\alpha) \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{R} = 2g(1-\cos\alpha) = \frac{2}{5}g.$$

**3. Сила реакции — второй закон Ньютона в проекции на радиус.** На ось $n$ (к центру) проекция ускорения — центростремительное $v^2/R$, сила тяжести даёт $mg\cos\alpha$, реакция $-N$:

$$mg\cos\alpha - N = \frac{mv^2}{R}.$$

Отсюда

$$N = mg\cos\alpha - 2mg(1-\cos\alpha) = mg(3\cos\alpha - 2).$$

При $\cos\alpha = \frac{4}{5}$:

$$N = mg\left(\frac{12}{5} - 2\right) = \frac{2}{5}mg.$$

$N > 0$ — шайба ещё на поверхности: она отрывается при $\cos\alpha = \frac{2}{3}$, а у

нас $\cos\alpha = 0{,}8 > \frac{2}{3}$.

**4. Ускорение шайбы целиком.** Для наглядности соберём ускорение из двух составляющих (рис. 2): $a_\tau = \frac{3}{5}g$ по касательной и $a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{2}{5}g$ к центру. Сумма проекций сил на $n$: $mg\cos\alpha - N = \frac{4}{5}mg - \frac{2}{5}mg = \frac{2}{5}mg = ma_n$ — сходится.

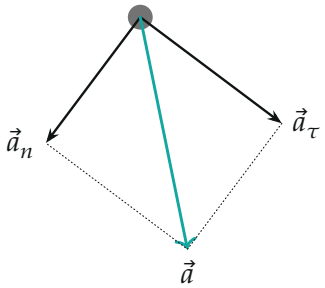



*Рис. 2. Ускорение шайбы: касательное $\frac{3}{5}g$ и центростремительное $\frac{2}{5}g$, в масштабе.*

**5. Как меняются сила реакции и касательное ускорение по ходу движения** (рис. 3): $N = mg(3\cos\alpha - 2)$ падает от $mg$ на вершине до нуля при отрыве ($\alpha \approx 48°$), $a_\tau = g\sin\alpha$ растёт. Значение $a_\tau = \frac{3}{5}g$ достигается при $\alpha \approx 37°$ — раньше отрыва.

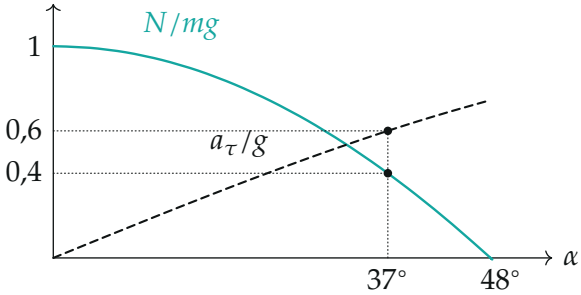



*Рис. 3. Сила реакции $N/mg = 3\cos\alpha - 2$ и касательное ускорение $a_\tau/g = \sin\alpha$ (пунктир) в зависимости от угла, посчитано; точки — искомый момент.*

**Обратите внимание.** Сила реакции здесь не равна $mg\cos\alpha$: шайба движется по окружности, и часть проекции силы тяжести на радиус идёт на центростремительное ускорение.

**Ответ.** По третьему закону Ньютона шайба давит на полушар с силой, равной реакции и направленной к центру:

$$F = mg(3\cos\alpha - 2) = \frac{2}{5}mg, \qquad \sin\alpha = \frac{a_\tau}{g} = \frac{3}{5}$$

**Проверка.** Размерность: $mg$ — сила. Предел: на вершине ($a_\tau = 0$, $\cos\alpha = 1$) $F = mg$ — шайба покоится; при $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ $F = 0$ — известное условие отрыва. Проекция на $n$ в пункте 4 сходится.

Смысл: к моменту, когда касательное ускорение $0{,}6g$, шайба давит на полушар уже в 2,5 раза слабее своего веса.

**Ответ.** $F = \frac{2}{5}mg$.