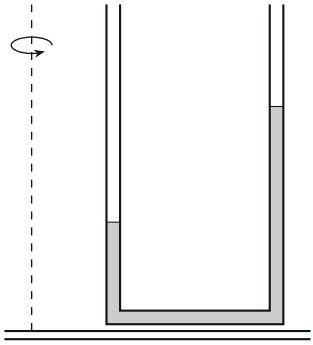
Вращающаяся изогнутая трубка с жидкостью

Задача 2. [Физтех 2011/12, 11 класс, задача 2] Изогнутая трубка состоит из одного горизонтального колена и двух вертикальных колен. Трубка укреплена на платформе, вращающейся с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси (см. рис.). Вертикальные колена находятся на расстояниях R и $3R$ от оси вращения. Установившаяся разность уровней (по высоте) налитой в трубку жидкости в вертикальных коленах равна H. Найдите угловую скорость вращения платформы. Диаметр трубки значительно меньше её длины.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Жидкость вращается вместе с трубкой, каждая её частица движется по окружности и имеет центростремительное ускорение $\omega^2 r$. Сообщить это ускорение жидкости в горизонтальном колене может только разность давлений на её концах: у дальнего от оси конца давление больше. Эту разность создают столбы жидкости в вертикальных коленах, поэтому у внешнего колена уровень выше. Задача на второй закон Ньютона для выделенной части жидкости, движущейся по окружности, плюс гидростатика в вертикальных коленах.

Обозначения. ρ — плотность жидкости, S — сечение трубки, p_0 — атмосферное давление, h_1 и $h_2 = h_1 + H$ — высоты уровней над горизонтальным коленом во внутреннем и внешнем коленах, p_1 и p_2 — давления в горизонтальном колене у оснований этих колен, r — расстояние от оси (рис. 1).

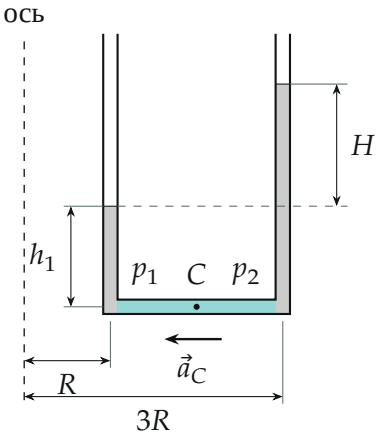


Рис. 1. Выделенный столбик жидкости в горизонтальном колене (бирюзовый), его центр масс C на расстоянии $2R$ от оси и ускорение $\vec{a}_C$ к оси.

1. Давления у концов горизонтального колена. В вертикальных коленах жидкость движется по окружностям, но ускорение $\omega^2 r$ горизонтально, а по вертикали жидкость покоится. Поэтому вдоль вертикали давление меняется по обычному закону гидростатики:

$$p_1 = p_0 + \rho g h_1, \qquad p_2 = p_0 + \rho g (h_1 + H), \qquad p_2 - p_1 = \rho g H.$$

2. Второй закон Ньютона для столбика. Мысленно выделим жидкость в горизонтальном колене от $r = R$ до $r = 3R$ (рис. 1). Её масса $m = \rho S \cdot 2R$. Горизонтальные силы на неё — только силы давления соседней жидкости на торцы: $p_1 S$ (от оси) и $p_2 S$ (к оси). Центр масс столбика движется по окружности радиуса $r_C = 2R$ с ускорением $a_C = \omega^2 \cdot 2R$, направленным к оси. Запишем второй закон Ньютона для столбика в проекции на направление к оси:

$$p_2 S - p_1 S = m\, a_C \quad \Rightarrow \quad \rho g H S = 2\rho S R \cdot 2\omega^2 R = 4\rho S \omega^2 R^2.$$

Отсюда

$$\omega = \frac{\sqrt{gH}}{2R}.$$

Сила тяжести и сила реакции стенок вертикальны и в эту проекцию не

входят — поэтому и выбрано горизонтальное направление.

3. Второй способ — малый элемент. Ускорение разных частей столбика разное, поэтому проверим ответ, не опираясь на центр масс. Возьмём слой жидкости между r и $r+dr$ (рис. 2), его масса $\rho S\,dr$, ускорение $\omega^2 r$ к оси. Второй закон Ньютона для слоя:

$$p(r+dr)\,S - p(r)\,S = \rho S\,dr\cdot\omega^2 r \quad\Rightarrow\quad dp = \rho\omega^2 r\,dr.$$

Просуммируем по всем слоям от $r=R$ до $r=3R$:

$$p_2 - p_1 = \rho\omega^2\,\frac{(3R)^2 - R^2}{2} = 4\rho\omega^2 R^2 = \rho g H,$$

то же уравнение, что в пункте 2.

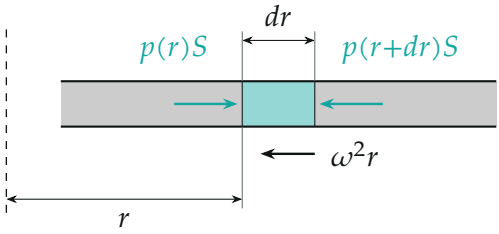


Рис. 2. Тонкий слой жидкости между r и $r+dr$: сила давления снаружи больше, чем изнутри, разность даёт ускорение $\omega^2 r$ к оси.

4. Наглядная картина. Если бы вертикальных колен было много, на любом расстоянии r уровень стоял бы на высоте $z(r) = z(0) + \dfrac{\omega^2 r^2}{2g}$ — это следует из $dp = \rho\omega^2 r\,dr$ и гидростатики, как в шаге 3. Уровни двух наших колен — две точки этой параболы (рис. 3). Разность высот параболы в точках $3R$ и R:

$$H = \frac{\omega^2}{2g}(9R^2 - R^2) = \frac{4\omega^2 R^2}{g},$$

и снова $\omega = \sqrt{gH}/(2R)$.

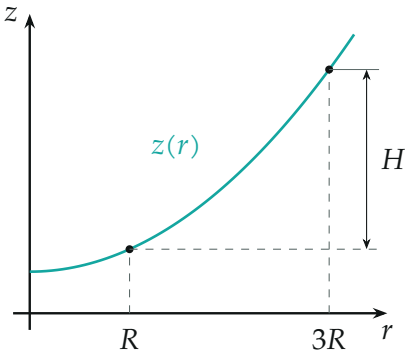


Рис. 3. Высота уровня жидкости в зависимости от расстояния до оси — парабола $z \propto \omega^2 r^2/(2g)$; уровни в коленах на расстояниях R и $3R$ — её точки. Построено при $\omega^2 R^2/g = H/4$.

Обратите внимание. Ускорение столбика нельзя брать на расстоянии R или $3R$: по второму закону Ньютона для системы частиц сумма внешних сил равна массе, умноженной на ускорение центра масс, а центр масс однородного столбика — посередине, на $2R$. Это совпадение с точным интегрированием верно потому, что $\omega^2 r$ линейно по r.

Ответ.

$$\boxed{\omega = \frac{\sqrt{gH}}{2R}}$$

Проверка. Размерность: $\sqrt{gH}$ — скорость, делённая на длину, — с^{-1}. Предел: при $H \to 0$ получаем $\omega \to 0$ — без вращения уровни одинаковы, как в сообщающихся сосудах. Второй способ (шаг 3 и парабола уровней) даёт то же.

Смысл: разность уровней H — это «гидростатический двигатель», который разгоняет жидкость горизонтального колена к оси; чем быстрее вращение, тем больше нужен перепад, $H \propto \omega^2$.

Ответ. $\omega = \dfrac{\sqrt{gH}}{2R}$.