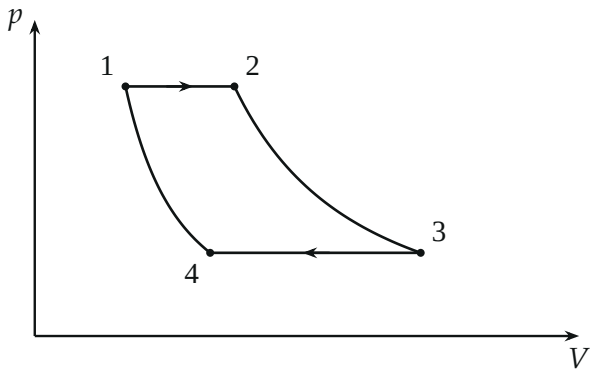
КПД цикла из изобар и адиабат

Задача 3. [Физтех 2011/12, 11 класс, задача 3] Идеальный одноатомный газ совершает цикл, состоящий из двух изобар и двух адиабат. Найдите КПД цикла, если при изобарическом расширении газ совершил работу A, а работа газа во всём цикле $A_ц > 0$.



Поясняющий рисунок: цикл из двух изобар (1–2, 3–4) и двух адиабат (2–3, 4–1) на диаграмме p–V; обход по часовой стрелке, так как $A_ц > 0$.

▲ **Решение. Что происходит.** Цикл прямой (работа за цикл положительна), значит, обход на диаграмме p–V — по часовой стрелке: газ расширяется при большем давлении и сжимается при меньшем. На адиабатах теплообмена нет, поэтому теплоту газ получает только на одном участке — изобарическом расширении, а отдаёт на изобарическом сжатии. КПД цикла — отношение работы за цикл к полученной теплоте; задача сводится к первому началу термодинамики на изобаре.

Обозначения. Состояния 1–4 — как на поясняющем рисунке: 1–2 — изобарическое расширение при давлении p, 2–3 и 4–1 — адиабаты, 3–4 — изобарическое сжатие; ν — количество вещества, R — газовая постоянная, $\Delta T = T_2 - T_1$; Q_{12} — теплота, полученная на 1–2.

1. Где газ получает теплоту. На адиабатах 2–3 и 4–1 теплота равна нулю по определению. На изобаре 3–4 газ сжимается, V и вместе с ним $T = pV/(\nu R)$ убывают: внутренняя энергия падает и работа газа

отрицательна, значит, теплота $Q_{34} = \Delta U_{34} + A_{34} < 0$ — газ её отдаёт. Получает газ теплоту только на 1–2 (рис. 1), поэтому

$$\eta = \frac{A_{\text{ц}}}{Q_{12}}.$$

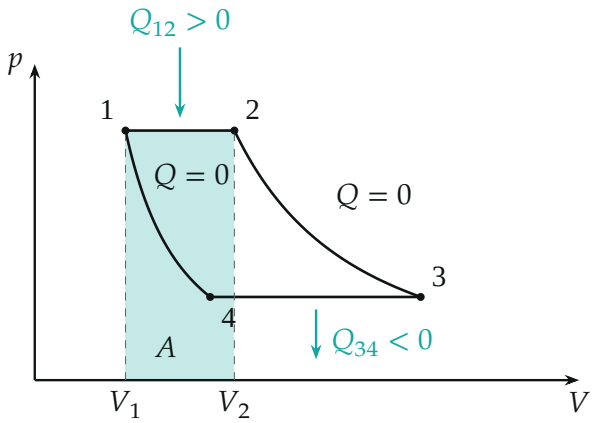


Рис. 1. Теплообмен на участках цикла: теплоту газ получает только на изобаре 1–2. Площадь под 1–2 (бирюзовая) — работа A.

2. Первое начало термодинамики на изобаре 1–2. Работа газа при постоянном давлении — площадь прямоугольника под изобарой (рис. 1), а по уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \nu RT$:

$$A = p\,(V_2 - V_1) = \nu R\,\Delta T.$$

Изменение внутренней энергии одноатомного газа

$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2}\,\nu R\,\Delta T = \frac{3}{2}\,A.$$

Первое начало термодинамики для процесса 1–2:

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A = \frac{3}{2}A + A = \frac{5}{2}\,A.$$

Знак плюс: газ в действительности получает теплоту, из неё $\frac{2}{5}$ уходит в работу и $\frac{3}{5}$ — на нагрев (рис. 2).

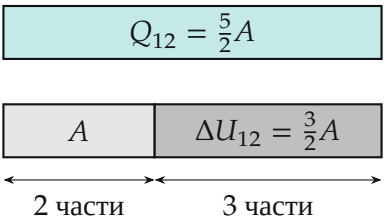


Рис. 2. Куда идёт теплота, полученная на изобаре одноатомным газом: две пятых — в работу, три пятых — во внутреннюю энергию.

3. КПД. Подставим Q_{12}:

$$\eta = \frac{A_\text{ц}}{Q_{12}} = \frac{2A_\text{ц}}{5A}.$$

Работа цикла $A_\text{ц}$ — площадь внутри цикла (рис. 3); она меньше суммы Q_{12}, потому что часть полученной теплоты газ отдаёт на 3–4: $A_\text{ц} = Q_{12} - |Q_{34}|$.

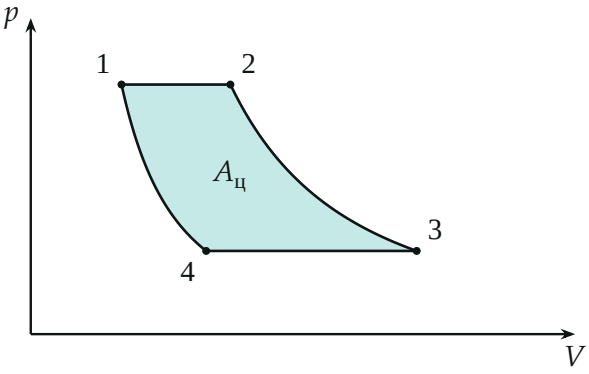


Рис. 3. Работа за цикл — площадь, ограниченная циклом.

Обратите внимание. Теплоту изобарического расширения нельзя приравнивать к работе A: у одноатомного газа на изобаре $Q = \frac{5}{2}A$, полтора раза по A уходит на нагрев. И делить нужно на полученную

теплоту, а не на суммарную за цикл (она равна $A_{\text{ц}}$, и «КПД» вышел бы единицей).

Ответ.

$$\boxed{\eta = \frac{A_{\text{ц}}}{Q_{12}} = \frac{2A_{\text{ц}}}{5A}}$$

Проверка. Размерность: отношение двух работ — безразмерно. Второй способ — через теплоту отдачи. Для изобар и адиабат $T_3/T_2 = T_4/T_1$ (обе адиабаты связывают одни и те же давления), отсюда $\eta = 1 - |Q_{34}|/Q_{12} = 1 - (p_{34}/p_{12})^{2/5}$. Для цикла рис. 1 ($p_{34}/p_{12} = 1/3$, $V_2/V_1 = 2{,}2$) численно $1-3^{-0{,}4} = 0{,}356$, и по нашей формуле $2A_{\text{ц}}/(5A)$ с площадями этого же цикла — тоже $0{,}356$. Знак: $\eta < 1$ требует $A_{\text{ц}} < \frac{5}{2}A$ — работа цикла меньше полученной теплоты.

Смысл: в цикле с изобарами и адиабатами вся теплота входит на одной изобаре, а для одноатомного газа она в $5/2$ раза больше работы на ней — отсюда множитель $2/5$.

Ответ. $\eta = \dfrac{2A_{\text{ц}}}{5A}$.