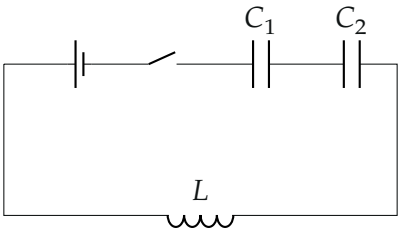
Два конденсатора, катушка и источник

Задача 4. [Физтех 2011/12, 11 класс, задача 4] В схеме, показанной на рисунке, все элементы можно считать идеальными, параметры элементов указаны на рисунке. До замыкания ключа конденсаторы были не заряжены. После замыкания ключа максимальный ток в катушке равен I_0.

1. Найдите ЭДС источника.
2. Найдите максимальное напряжение на конденсаторе C_1.



▲ **Решение.** **Что происходит.** После замыкания ключа источник заряжает конденсаторы через катушку. Ток нарастает не сразу: катушка мешает его изменению. Конденсаторы заряжаются, их напряжение растёт и в какой-то момент сравнивается с ЭДС — тогда напряжение на катушке нулевое и ток максимален. Дальше ток по инерции продолжает заряжать конденсаторы выше ЭДС, пока не остановится. Без сопротивления это незатухающие колебания. Задача на закон сохранения энергии в LC-контуре с источником: работа источника идёт в энергию конденсаторов и катушки.

Обозначения. $\mathcal{E}$ — ЭДС источника; q — заряд, прошедший через источник после замыкания (он же заряд каждого конденсатора); I — ток; U_1 — напряжение на C_1.

1. Конденсаторы последовательно — один конденсатор. Ветвь без разветвлений, поэтому через C_1 и C_2 протекает один ток и на их пластинах один и тот же заряд q (до замыкания они не заряжены). Напряжения складываются:

$$U = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = \frac{q}{C}, \qquad C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Цепь эквивалентна контуру из источника, катушки L и одного конденсатора C (рис. 1).

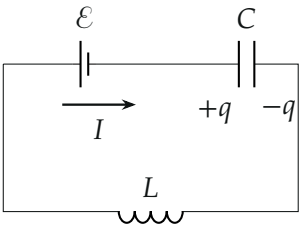


Рис. 1. Эквивалентная схема: последовательные C_1 и C_2 заменены одним конденсатором C; через источник за время зарядки прошёл заряд q.

Пункт 1.

2. Момент максимального тока. Закон Ома для контура (второе правило Кирхгофа) в любой момент:

$$\mathcal{E} = \frac{q}{C} + L\frac{dI}{dt}.$$

Ток максимален, когда $dI/dt = 0$, то есть напряжение на катушке нулевое, а на конденсаторах

$$\frac{q_*}{C} = \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad q_* = C\mathcal{E}$$

(рис. 2).

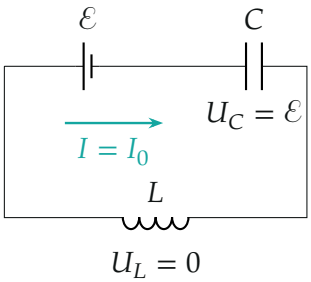


Рис. 2. Момент максимального тока: напряжение на катушке нулевое, всё напряжение источника — на конденсаторе.

3. Закон сохранения энергии от замыкания до максимального тока. Источник перенёс заряд q_* и совершил работу $A = \mathcal{E}q_*$. Сопротивления нет, теплота не выделяется, вся работа идёт в энергию конденсатора и катушки:

$$\mathcal{E}q_* = \frac{q_*^2}{2C} + \frac{LI_0^2}{2} \quad \Rightarrow \quad C\mathcal{E}^2 = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} + \frac{LI_0^2}{2}.$$

Отсюда

$$\mathcal{E} = I_0\sqrt{\frac{L}{C}} = I_0\sqrt{\frac{L(C_1+C_2)}{C_1C_2}}.$$

Пункт 2.

4. Момент максимального заряда. Заряд q растёт, пока ток течёт в одну сторону, и максимален, когда ток обращается в ноль. Энергия катушки тогда нулевая. Закон сохранения энергии от замыкания до этого момента:

$$\mathcal{E}q_m = \frac{q_m^2}{2C} \quad \Rightarrow \quad q_m = 2C\mathcal{E}.$$

Корень $q_m = 0$ — начальный момент, он не подходит.

5. Напряжение на C_1. Заряд у C_1 тот же, что у эквивалентного C:

$$U_1 = \frac{q_m}{C_1} = \frac{2C\mathcal{E}}{C_1} = \frac{2\mathcal{E}C_2}{C_1+C_2} = 2I_0\sqrt{\frac{LC_2}{C_1(C_1+C_2)}}.$$

Напряжение на C_1 в этот момент тоже наибольшее, так как $U_1 = q/C_1$ растёт вместе с q.

6. Второй способ — закон движения заряда. Уравнение пункта 2 перепишем через $\ddot{q} = dI/dt$:

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}.$$

Это колебания около положения равновесия $q = C\mathcal{E}$ с частотой $\omega = 1/\sqrt{LC}$. При $q(0) = 0$, $\dot{q}(0) = 0$:

$$q(t) = C\mathcal{E}\,(1 - \cos\omega t), \qquad I(t) = C\mathcal{E}\,\omega\sin\omega t.$$

Максимум тока $I_0 = C\mathcal{E}\omega = \mathcal{E}\sqrt{C/L}$ — то же, что в пункте 3; максимум заряда $2C\mathcal{E}$ — как в пункте 4 (рис. 3).

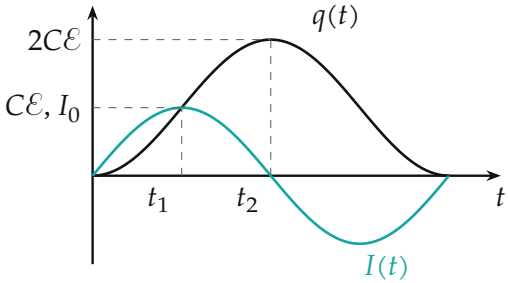


Рис. 3. Заряд конденсаторов $q(t)$ (чёрный) и ток $I(t)$ (бирюзовый). В момент t_1 ток максимален и $q = C\mathcal{E}$; в момент t_2 ток нулевой, заряд максимален, $q = 2C\mathcal{E}$. Масштаб тока выбран так, что I_0 и $C\mathcal{E}$ на одной высоте.

Обратите внимание. Работа источника — $\mathcal{E}q$, а не $q^2/(2C)$: при зарядке через катушку конденсатор получает только половину этой работы к моменту $q = C\mathcal{E}$, а вторая половина — в катушке. Поэтому напряжение на конденсаторах доходит до $2\mathcal{E}$, а не до $\mathcal{E}$.

Ответ.

$$\mathcal{E} = I_0\sqrt{\frac{L(C_1+C_2)}{C_1C_2}}, \qquad U_{1\max} = \frac{2\mathcal{E}C_2}{C_1+C_2} = 2I_0\sqrt{\frac{LC_2}{C_1(C_1+C_2)}}$$

Проверка. Размерность: $I_0\sqrt{L/C}$ — ток на сопротивление, вольты ($\sqrt{L/C}$ — волновое сопротивление контура). Предел: при $C_2 \to \infty$ второй конденсатор — просто провод, $C \to C_1$, и $U_{1\max} \to 2\mathcal{E}$ — как у одного конденсатора, заряжаемого через катушку. При $C_1 = C_2$ напряжение делится пополам: $U_{1\max} = \mathcal{E}$. Второй способ (пункт 6) дал те же числа.

Смысл: катушка — «маховик» для тока: разогнавшись, ток перезаряжает конденсаторы вдвое выше ЭДС, и на каждом из последовательных конденсаторов напряжение тем больше, чем меньше его ёмкость.

Ответ. 1) $\mathcal{E} = I_0\sqrt{\dfrac{L(C_1+C_2)}{C_1C_2}}$; 2) $U_{1\max} = 2I_0\sqrt{\dfrac{LC_2}{C_1(C_1+C_2)}}$.