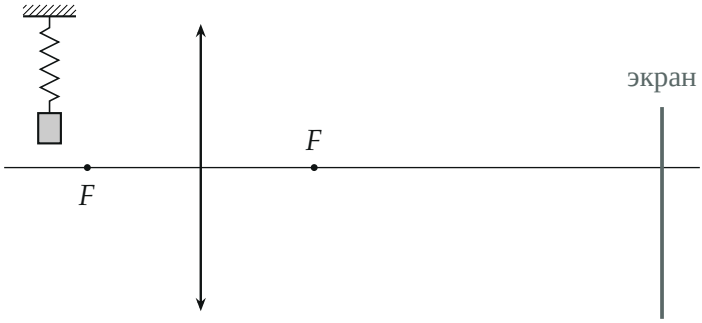
Груз на пружине: скорость изображения

Задача 5. [Физтех 2011/12, 11 класс, задача 5] Груз, висящий на пружине, совершает вертикальные колебания, двигаясь перпендикулярно главной оптической оси линзы с фокусным расстоянием $F = 18$ см. На экране, который можно перемещать, получено изображение груза. При этом максимальная скорость изображения оказалась в 3 раза больше максимальной скорости груза.

1. Найдите расстояние между грузом и линзой.
2. На какое расстояние и куда (по отношению к грузу) следует переместить линзу, чтобы максимальная скорость изображения увеличилась в 2 раза по сравнению с предыдущей?



Поясняющий рисунок: груз на пружине колеблется вертикально перед линзой, его изображение получено на экране.

▲ **Решение. Что происходит.** Изображение получено на экране, значит, оно действительное: груз дальше фокуса, изображение перевёрнутое и находится за линзой. Груз движется поперёк оптической оси на неизменном расстоянии от линзы, поэтому увеличение линзы во время колебаний одно и то же, и изображение повторяет движение груза, растянутое в Г раз. Значит, отношение скоростей — это поперечное увеличение. Задача на формулу тонкой линзы.

Обозначения. d — расстояние от груза до линзы, f — от линзы до изображения (экрана), $\Gamma = f/d$ — поперечное увеличение, y и y' — смещения груза и изображения от главной оптической оси (рис. 1), v и v' — их скорости.

1. Скорость изображения. Луч через оптический центр не преломляется (рис. 1), из подобия треугольников

$$\frac{|y'|}{|y|} = \frac{f}{d} = \Gamma, \qquad y' = -\Gamma y.$$

Расстояния d и f при колебаниях не меняются (груз движется перпендикулярно оси, экран неподвижен), поэтому Γ — постоянное число. Скорость — производная смещения по времени:

$$v' = \frac{dy'}{dt} = -\Gamma\frac{dy}{dt} = -\Gamma v, \qquad v'_{\max} = \Gamma\, v_{\max}.$$

Минус — изображение перевёрнуто и движется в противоположную сторону.

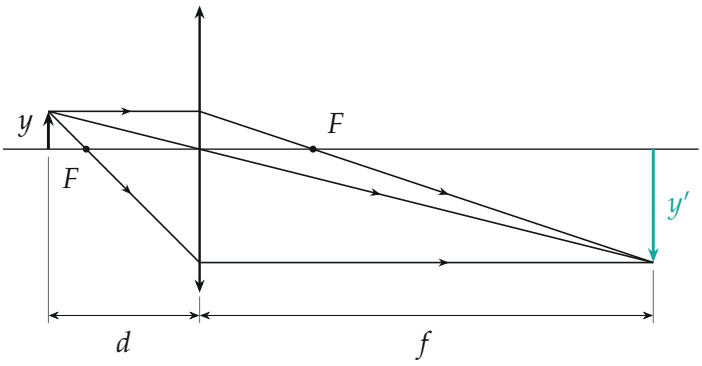


Рис. 1. Построение изображения при $d = 24$ см, $F = 18$ см (масштаб соблюдён): три луча от верхней точки груза сходятся в точке изображения на экране, $f = 72$ см, $|y'| = 3y$.

Пункт 1.

2. Расстояние до груза. По условию $v'_{\max} = 3v_{\max}$, значит, $\Gamma_1 = 3$, то есть $f_1 = 3d_1$. Формула тонкой собирающей линзы для действительного изображения:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{d_1}\left(1 + \frac{1}{\Gamma_1}\right) = \frac{1}{F},$$

$$d_1 = F\,\frac{\Gamma_1 + 1}{\Gamma_1} = 18 \cdot \frac{4}{3} = 24 \text{ см}.$$

Изображение — на расстоянии $f_1 = 3d_1 = 72$ см за линзой; на этом же расстоянии экран.

Пункт 2.

3. Новое увеличение и новое расстояние. Амплитуда колебаний груза и его максимальная скорость не меняются, поэтому вдвое большая скорость изображения означает вдвое большее увеличение: $\Gamma_2 = 2\Gamma_1 = 6$. По той же формуле

$$d_2 = F\,\frac{\Gamma_2 + 1}{\Gamma_2} = 18 \cdot \frac{7}{6} = 21 \text{ см}.$$

Экран для чёткого изображения отодвигаем на $f_2 = 6d_2 = 126$ см от линзы — по условию он перемещается свободно.

4. Перемещение линзы.

$$d_1 - d_2 = F\Big(\frac{1}{\Gamma_1} - \frac{1}{\Gamma_2}\Big) = 18\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\Big) = 3 \text{ см}.$$

Расстояние уменьшилось: линзу надо переместить на 3 см *к грузу*. Это видно и по графику увеличения (рис. 2): из формулы линзы $\Gamma = F/(d - F)$, и чем ближе груз к фокусу, тем больше увеличение.

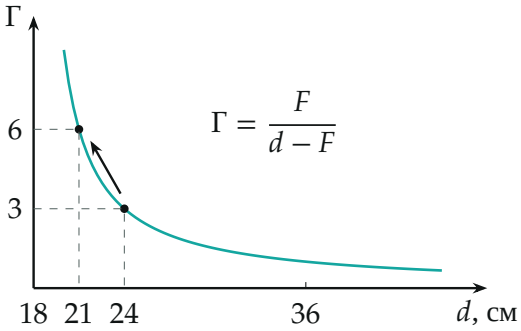


Рис. 2. Поперечное увеличение действительного изображения в зависимости от расстояния d при $F = 18$ см (построено по формуле). Сдвиг от $d = 24$ см к $d = 21$ см удваивает увеличение.

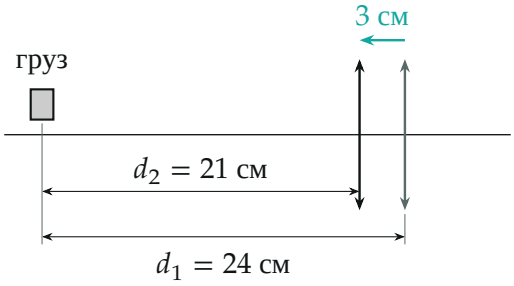


Рис. 3. Линзу (серая — прежнее положение) переносят на 3 см к грузу; масштаб по горизонтали соблюдён.

Обратите внимание. Сдвигаем линзу, а не груз, но для формулы линзы важно только расстояние между ними; и экран после сдвига тоже надо переставить (с 72 на 126 см от линзы), иначе изображение будет размытым.

Ответ.

$$d_1 = F\,\frac{\Gamma_1 + 1}{\Gamma_1} = 24\text{ см}; \qquad d_1 - d_2 = F\Big(\frac{1}{\Gamma_1} - \frac{1}{\Gamma_2}\Big) = 3\text{ см к грузу}$$

Проверка. Размерность: F умножается на безразмерные числа — сантиметры. Подстановка: $1/24 + 1/72 = 4/72 = 1/18$ и $1/21 + 1/126 = 7/126 = 1/18$ — формула линзы выполняется в обоих положениях. Предел: при $\Gamma \to \infty$ получаем $d \to F$ — груз в фокусе, изображение уходит на бесконечность.

Смысл: линза работает как «рычаг» для движения: поперечная скорость изображения равна скорости предмета, умноженной на увеличение, а увеличение резко растёт, когда предмет подходит к фокусу.

Ответ. 1) $d_1 = 24$ см; 2) на 3 см ближе к грузу.