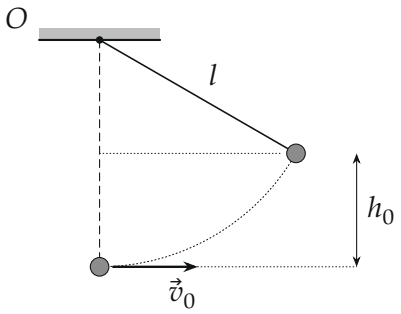
Шарик на нити, поднимающийся не выше точки подвеса

Задача 1. [Физтех 2011/12, 11 класс, задача 1] Маленький шарик массой m висит неподвижно на невесомой нерастяжимой нити длиной l. Шарику толчком сообщают такую горизонтальную скорость, что он в итоге поднимается над начальной точкой на максимальную высоту $h_0 < l$. Найдите силу натяжения нити в момент, когда шарик находился на высоте $h = h_0/2$.



Поясняющий рисунок. После толчка шарик движется по дуге окружности и поднимается на высоту h_0 над начальной точкой (нарисовано для $h_0 = l/2$).

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на движение по окружности: закон сохранения энергии даёт скорость, второй закон Ньютона в проекции на нить — натяжение. Так как $h_0 < l$, шарик не поднимается выше точки подвеса: нить всё время натянута, и шарик качается по дуге окружности радиуса l, в верхней точке h_0 его скорость равна нулю.

Обозначения. φ — угол нити с вертикалью в момент, когда шарик на высоте h; v — его скорость в этот момент; ось n — вдоль нити к точке подвеса O (туда направлено центростремительное ускорение), ось τ — по касательной к траектории.

1. Скорость — закон сохранения механической энергии. Сопротивления нет, натяжение нити перпендикулярно скорости и работы не совершает, работает только сила тяжести — механическая энергия шарика сохраняется. Между положением на высоте h и верхней точкой

($v = 0$):

$$\frac{mv^2}{2} + mgh = mgh_0 \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2g(h_0 - h).$$

2. Угол нити — геометрия. На высоте h шарик ниже точки подвеса на $l - h$ (рис. 1), поэтому

$$\cos\varphi = \frac{l-h}{l}.$$

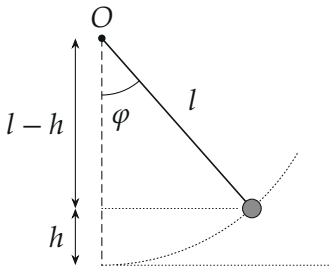


Рис. 1. На высоте h нить отклонена на угол φ, $\cos\varphi = (l-h)/l$ (нарисовано для $h_0 = l/2$, $h = h_0/2$).

3. Натяжение — второй закон Ньютона в проекции на нить. На шарик действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и натяжение $\vec{T}$ (рис. 2): $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$. Проецируем на ось n: на неё проекция ускорения — центростремительное v^2/l, а касательное ускорение в эту проекцию не входит — поэтому и выбрана ось вдоль нити. Проекция силы тяжести на n равна $-mg\cos\varphi$:

$$T - mg\cos\varphi = \frac{mv^2}{l}.$$

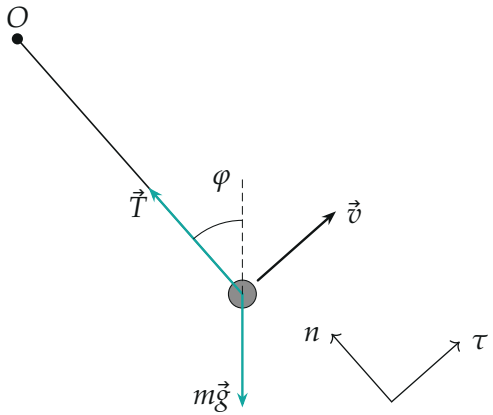


Рис. 2. Силы, действующие на шарик; ось n — вдоль нити к O, ось τ — вдоль скорости.

Подставим v^2 и $\cos\varphi$:

$$T = mg\,\frac{l-h}{l} + \frac{2mg(h_0-h)}{l} = mg\,\frac{l+2h_0-3h}{l}.$$

Это натяжение на любой высоте h от 0 до h_0. При $h = h_0/2$:

$$T = mg\,\frac{l+2h_0-\frac{3}{2}h_0}{l} = mg\left(1+\frac{h_0}{2l}\right).$$

4. Как меняется натяжение. T линейно убывает с высотой (рис. 3): внизу $T = mg(1+2h_0/l)$ — больше веса, сила тяжести и натяжение вместе дают центростремительное ускорение; в верхней точке $v = 0$, и $T = mg(l-h_0)/l = mg\cos\varphi_{\max}$ — нить держит только проекцию веса.

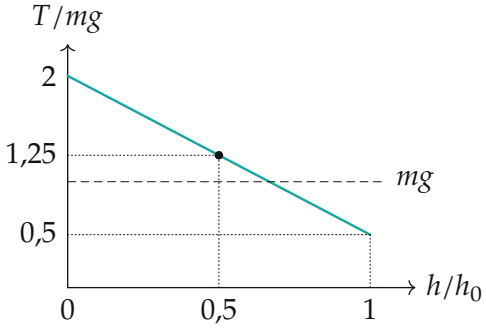


Рис. 3. Натяжение нити в зависимости от высоты для $h_0 = l/2$: прямая $T/mg = 2 - 1{,}5\,h/h_0$, точка — момент $h = h_0/2$.

Обратите внимание. Условие $h_0 < l$ сказано не просто так: только тогда нить натянута на всём пути и шарик идёт по окружности. При $h_0 > l$ шарик мог бы сойти с окружности, и закон «$v = 0$ в верхней точке» перестал бы работать.

Ответ.

$$\boxed{T = mg\left(1 + \frac{h_0}{2l}\right)}$$

Проверка. Размерность: h_0/l безразмерно, T — в единицах силы. Предел: при $h_0 \to 0$ шарик почти не движется, $T \to mg$ — как у висящего шарика. Второй способ для частного случая: при $h_0 = l$ (подъём до горизонтали) на высоте $l/2$ угол $60°$, $v^2 = gl$, $T = mg\cos 60° + mg = 1{,}5\,mg$ — формула даёт $1 + 1/2 = 1{,}5$.

Смысл: натяжение больше веса на $mgh_0/(2l)$ — на эту величину нить «добавляет» силы, чтобы удержать шарик на окружности.

Ответ. $T = mg\left(1 + \frac{h_0}{2l}\right)$.