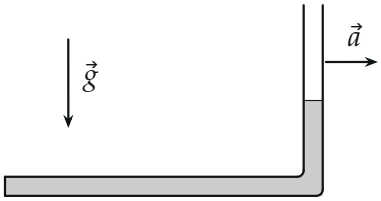
Трубка с жидкостью движется с ускорением

Задача 2. [Физтех 2011/12, 11 класс, задача 2] Изогнутая трубка состоит из горизонтального колена длиной l, запаянного с одного конца, и вертикального колена, открытого в атмосферу (см. рис.). Трубка заполнена водой так, что в вертикальном колене высота столба воды равна $l/3$. Трубку двигают с ускорением $a = g/5$, направленным вдоль горизонтального колена. Плотность воды ρ, атмосферное давление P_0. Диаметр трубки значительно меньше её длины.



1. Найдите давление в воде в месте изгиба трубки.
2. Найдите давление в воде у запаянного конца трубки.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на жидкость в ускоренно движущемся сосуде. Вода не может сдвинуться: горизонтальное колено целиком заполнено и запаяно, вода несжимаема. Значит, вся вода движется вместе с трубкой с ускорением $\vec{a}$, и каждый её кусок подчиняется второму закону Ньютона. В вертикальном колене ускорение направлено поперёк столба — вдоль столба давление меняется, как в покое. В горизонтальном колене столб воды надо разогнать, и это делает разность давлений на его концах.

Обозначения. S — сечение трубки, P_1 — давление в месте изгиба, P_2 — у запаянного конца. Ось x — горизонтально, вдоль $\vec{a}$ (от запаянного конца к изгибу), ось y — вертикально вверх.

Пункт 1. Давление в месте изгиба.

1. Второй закон Ньютона для столба в вертикальном колене, проекция на y. Выделим столб воды в вертикальном колене высотой $l/3$, масса $m_1 = \rho Sl/3$ (рис. 1). По вертикали на него действуют: сила давления атмосферы P_0S сверху (вниз), сила давления снизу P_1S (вверх)

и сила тяжести $m_1 g$. Горизонтальное ускорение ему сообщают стенки трубки, их силы горизонтальны и в проекцию на y не входят — поэтому берём именно эту ось. Ускорение по y равно нулю:

$$P_1 S - P_0 S - \rho S \frac{l}{3} g = 0 \quad \Rightarrow \quad P_1 = P_0 + \frac{1}{3}\rho g l.$$

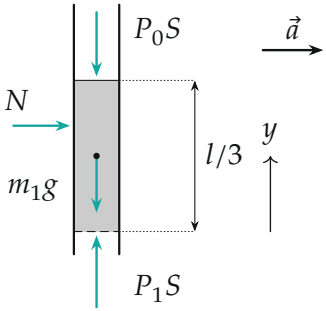


Рис. 1. Силы, действующие на столб воды в вертикальном колене; N — сила со стороны стенки, она горизонтальна и сообщает столбу ускорение $\vec{a}$.

Пункт 2. Давление у запаянного конца.

2. Второй закон Ньютона для столба в горизонтальном колене, проекция на x. Выделим воду в горизонтальном колене: длина l (трубка тонкая, изгиб не важен), масса $m_2 = \rho S l$ (рис. 2). Вдоль оси x на неё действуют только силы давления на торцах: у запаянного конца давление P_2 толкает воду вперёд, по $\vec{a}$, у изгиба давление P_1 — назад. Сила тяжести и силы стенок перпендикулярны x. Ускорение — a:

$$P_2 S - P_1 S = \rho S l a \quad \Rightarrow \quad P_2 = P_1 + \rho l a.$$

Подставим P_1 и $a = g/5$:

$$P_2 = P_0 + \frac{1}{3}\rho g l + \frac{1}{5}\rho g l = P_0 + \frac{8}{15}\rho g l.$$

Разгонять воду должна сила, направленная по $\vec{a}$, поэтому давление сзади (у запаянного конца) больше, чем спереди: $P_2 > P_1$.

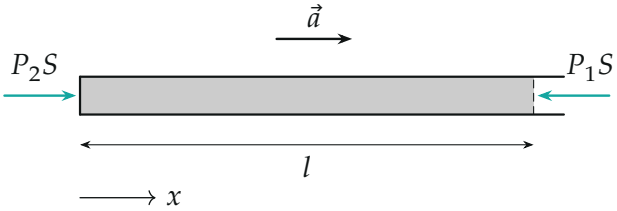


Рис. 2. Силы давления на торцах воды в горизонтальном колене; разность $P_2S - P_1S$ разгоняет воду с ускорением $\vec{a}$.

3. Давление вдоль всей трубки. Пройдём по воде от открытого конца к запаянному (рис. 3): в вертикальном колене давление растёт с глубиной на ρg на единицу длины, в горизонтальном — на ρa на единицу длины, против направления ускорения. Для $a = g/5$ в горизонтальном колене давление растёт в 5 раз медленнее.

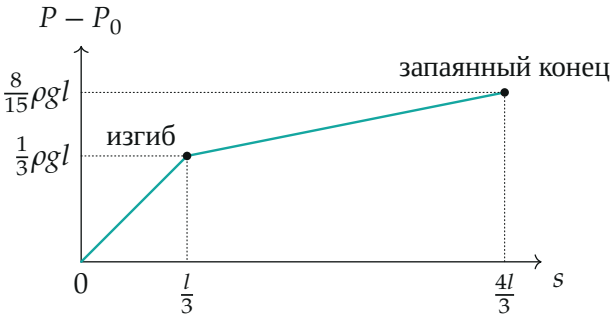


Рис. 3. Избыточное давление воды вдоль трубки (посчитано для $a = g/5$); s — путь по воде от поверхности в вертикальном колене.

Обратите внимание. Уровень воды в вертикальном колене при разгоне не меняется: вытечь из запаянного колена воде некуда, а сжаться она не может. Поэтому высота $l/3$ остаётся, и разгон сказывается только на давлении в горизонтальном колене.

Ответ.

$$P_1 = P_0 + \frac{1}{3}\rho g l, \qquad P_2 = P_0 + \rho l\left(\frac{g}{3} + a\right) = P_0 + \frac{8}{15}\rho g l$$

Проверка. Размерность: ρgl и ρla — давление. Предел: при $a = 0$ $P_2 = P_1$ — в покоящейся горизонтальной трубке давление вдоль неё одинаково. Знак: при ускорении в обратную сторону ($a < 0$) давление у запаянного конца было бы меньше, чем у изгиба: разгонять воду назад должно уже давление у изгиба.

Смысл: запаянный конец «толкает» воду вперёд, и для этого давление там на ρla больше, чем у изгиба.

Ответ. 1) $P_1 = P_0 + \dfrac{1}{3}\rho gl$; 2) $P_2 = P_0 + \dfrac{8}{15}\rho gl$.