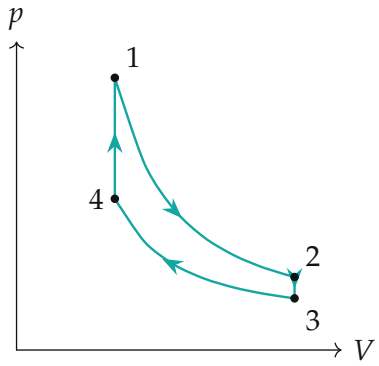
Цикл из изохор и адиабат: подведённое тепло

Задача 3. [Физтех 2011/12, 11 класс, задача 3] С ν молями идеального одноатомного газа проводят прямой циклический процесс, состоящий из двух изохор и двух адиабат. В процессе адиабатического расширения температура газа уменьшается на ΔT_1 ($\Delta T_1 > 0$), а в процессе адиабатического сжатия изменение температуры вдвое меньше. Сколько тепла подводится к газу при изохорическом нагревании, если при изохорическом охлаждении температура уменьшается на ΔT_2 ($\Delta T_2 > 0$)?



Поясняющий рисунок. Цикл на диаграмме pV (посчитан для примера): $1 \to 2$ *— адиабатическое расширение,* $2 \to 3$ *— изохорическое охлаждение,* $3 \to 4$ *— адиабатическое сжатие,* $4 \to 1$ *— изохорическое нагревание.*

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на первое начало термодинамики для цикла (цикл Отто). На адиабатах теплообмена нет, на изохорах нет работы. Значит, тепло, подведённое на изохоре $4 \to 1$, целиком идёт на рост внутренней энергии, и нужно только найти разность температур $T_1 - T_4$. Её собираем из трёх известных изменений температуры, обходя цикл по кругу.

Обозначения. Состояния 1, 2, 3, 4 — как на поясняющем рисунке, $T_1, \dots, T_4$ — их температуры, Q — тепло, подведённое на изохоре $4 \to 1$. Внутренняя энергия одноатомного газа $U = \frac{3}{2}\nu RT$.

1. Изменения температуры по условию. Прямой цикл обходится по часовой стрелке: расширение при большем давлении, сжатие — при

меньшем. Записываем условие на каждом участке (рис. 1):

$$T_1 - T_2 = \Delta T_1, \qquad T_2 - T_3 = \Delta T_2, \qquad T_4 - T_3 = \frac{1}{2}\Delta T_1.$$

На адиабате $3 \to 4$ газ сжимается, внешние силы совершают над ним работу, и температура растёт — поэтому $T_4 > T_3$.

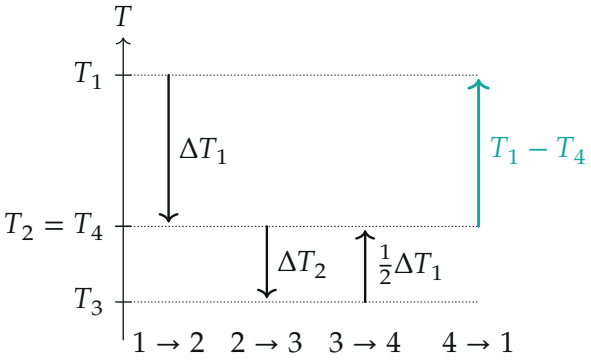


Рис. 1. Температуры в вершинах цикла и их изменения по участкам (пример: $\Delta T_1 = 2\Delta T_2$). Сумма изменений по циклу равна нулю.

2. Обход цикла. Температура — функция состояния: обойдя цикл, возвращаемся к T_1. Поэтому

$$T_1 - T_4 = (T_1 - T_2) + (T_2 - T_3) - (T_4 - T_3) = \\ = \Delta T_1 + \Delta T_2 - \frac{1}{2}\Delta T_1 = \frac{1}{2}\Delta T_1 + \Delta T_2.$$

3. Первое начало термодинамики для изохоры $4 \to 1$. Объём не меняется, работа газа равна нулю, всё подведённое тепло идёт на изменение внутренней энергии:

$$Q = \Delta U_{41} = \frac{3}{2}\nu R(T_1 - T_4) = \\ = \frac{3}{2}\nu R\left(\frac{1}{2}\Delta T_1 + \Delta T_2\right) = \frac{3}{4}\nu R(\Delta T_1 + 2\Delta T_2).$$

$Q > 0$ — газ действительно получает тепло.

4. Проверка вторым способом — баланс энергии за цикл. Работа газа за цикл — это работа на адиабатах. На адиабате $A = -\Delta U$: при расширении газ совершает $A_{12} = \frac{3}{2}\nu R\Delta T_1$, при сжатии над газом совершают $\frac{3}{2}\nu R \cdot \frac{1}{2}\Delta T_1$. Полезная работа $A = \frac{3}{4}\nu R\Delta T_1$. Отданное на изохоре $2 \to 3$ тепло $Q_x = \frac{3}{2}\nu R\Delta T_2$. За цикл внутренняя энергия возвращается, поэтому (рис. 2)

$$Q = A + Q_x = \frac{3}{4}\nu R\Delta T_1 + \frac{3}{2}\nu R\Delta T_2 = \frac{3}{4}\nu R(\Delta T_1 + 2\Delta T_2)$$

— то же самое.

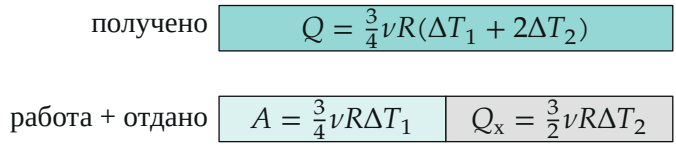


Рис. 2. Баланс энергии за цикл: подведённое тепло = работа + отданное тепло (длины — для примера $\Delta T_1 = 2\Delta T_2$).

5. Как меняется температура по ходу цикла. Для того же примера ($T_1 = 4T_3$, $T_2 = T_4 = 2T_3$) построим температуру при обходе (рис. 3): на адиабатах $TV^{2/3} = \text{const}$, на изохорах температура меняется скачком при одном объёме.

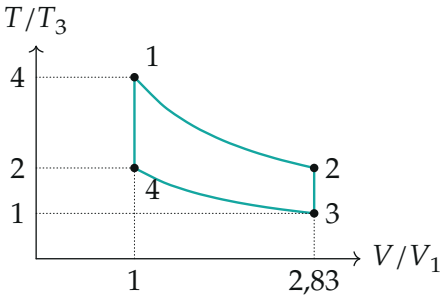


Рис. 3. Температура газа на диаграмме TV для примера $\Delta T_1 = 2\Delta T_2$ (посчитано по $TV^{2/3} = \text{const}$).

Обратите внимание. Изменение температуры на адиабатическом сжатии — рост, а не падение: при обходе цикла его надо вычитать, а не складывать. Перепутав знак, получим $\frac{3}{2}\nu R\left(\frac{3}{2}\Delta T_1 + \Delta T_2\right)$ — неверно.

Ответ.

$$\boxed{Q = \frac{3}{2}\nu R\left(\frac{\Delta T_1}{2} + \Delta T_2\right) = \frac{3}{4}\nu R(\Delta T_1 + 2\Delta T_2)}$$

Проверка. Размерность: $\nu R\Delta T$ — энергия. Предел: если бы на адиабатах температура менялась одинаково ($\frac{1}{2}\Delta T_1 \to \Delta T_1$), работа за цикл была бы нулевой и Q совпало бы с отданным теплом $\frac{3}{2}\nu R\Delta T_2$. Второй способ (баланс энергии, пункт 4) дал то же.

Смысл: подведённое тепло больше отданного ровно на работу цикла — разность изменений внутренней энергии на двух адиабатах.

Ответ. $Q = \frac{3}{4}\nu R(\Delta T_1 + 2\Delta T_2)$.