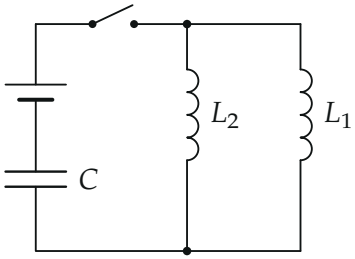
Две параллельные катушки и конденсатор

Задача 4. [Физтех 2011/12, 11 класс, задача 4] В схеме, показанной на рисунке, все элементы можно считать идеальными, параметры элементов указаны на рисунке. До замыкания ключа ток в цепи отсутствовал, конденсатор был не заряжен. После замыкания ключа максимальное напряжение на конденсаторе равно U_0.



1. Найдите ЭДС источника.
2. Найдите максимальный ток в катушке L_1.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на колебательный контур с источником. После замыкания ключа источник заряжает конденсатор через катушки; сопротивлений нет, энергия не теряется, и в цепи идут незатухающие колебания. Конденсатор колеблется около напряжения $\mathcal{E}$ (там ток максимален), от 0 до $2\mathcal{E}$. Главная идея для двух параллельных катушек: напряжения на них в любой момент равны, отсюда следует постоянное отношение токов. Ключевой закон — сохранение энергии: работа источника = энергия конденсатора + энергия катушек.

Обозначения. $\mathcal{E}$ — ЭДС источника, q — заряд конденсатора, I_1, I_2 — токи в катушках, $I = I_1 + I_2$ — ток через источник и конденсатор (рис. 1).

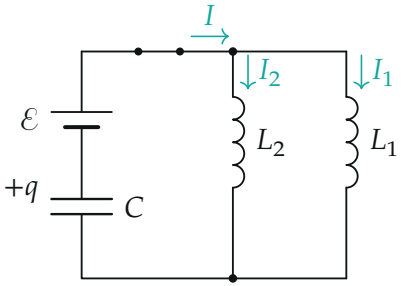


Рис. 1. Ключ замкнут: ток I от источника делится между катушками на I_1 и I_2.

1. Связь токов в катушках. Катушки соединены параллельно, напряжения на них в любой момент одинаковы. Напряжение на катушке — $L\,dI/dt$:

$$L_1\frac{dI_1}{dt} = L_2\frac{dI_2}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(L_1I_1 - L_2I_2\right) = 0.$$

Значит, $L_1I_1 - L_2I_2$ не меняется. До замыкания токов не было, поэтому всё время

$$L_1I_1 = L_2I_2, \qquad I_2 = \frac{L_1}{L_2}I_1.$$

Энергия катушек выражается через один ток:

$$W_L = \frac{L_1I_1^2}{2} + \frac{L_2I_2^2}{2} = \frac{L_1I_1^2}{2}\left(1 + \frac{L_1}{L_2}\right).$$

Пункт 1. ЭДС источника.

2. Закон сохранения энергии от замыкания до момента максимального напряжения. Когда напряжение на конденсаторе максимально, заряд перестаёт расти: $I = dq/dt = 0$. Ток во всей неразветвлённой части равен нулю, $I_1 + I_2 = 0$; вместе с $L_1I_1 = L_2I_2$ это даёт $I_1 = I_2 = 0$ — энергии в катушках нет. Через источник прошёл заряд CU_0, его работа $\mathcal{E}CU_0$:

$$\mathcal{E}\cdot CU_0 = \frac{CU_0^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = \frac{U_0}{2}.$$

Пункт 2. Максимальный ток в катушке L_1.

3. Когда ток максимален. I_1 пропорционален I_2, поэтому оба максимальны одновременно. В этот момент $dI_1/dt = 0$ и напряжение на катушках равно нулю. По закону Кирхгофа для контура источник — конденсатор — катушка напряжение на конденсаторе равно $\mathcal{E}$, заряд $C\mathcal{E}$ (рис. 2).

4. Закон сохранения энергии от замыкания до момента макси-

мального тока. Через источник прошёл заряд $C\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E}\cdot C\mathcal{E}=\frac{C\mathcal{E}^2}{2}+\frac{L_1I_{1m}^2}{2}\left(1+\frac{L_1}{L_2}\right)\quad\Rightarrow\quad\frac{L_1(L_1+L_2)}{L_2}I_{1m}^2=C\mathcal{E}^2.$$

Отсюда, с $\mathcal{E}=U_0/2$:

$$I_{1m}=\mathcal{E}\sqrt{\frac{CL_2}{L_1(L_1+L_2)}}=\frac{U_0}{2}\sqrt{\frac{CL_2}{L_1(L_1+L_2)}}.$$

Половина работы источника ушла в энергию конденсатора, половина — в магнитную энергию катушек (рис. 3).

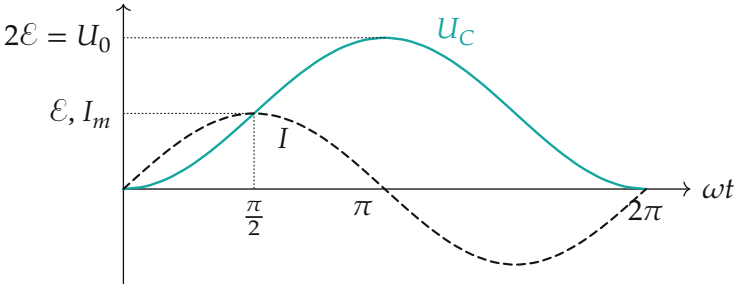


Рис. 2. Напряжение на конденсаторе $U_C=\mathcal{E}(1-\cos\omega t)$ и ток $I=I_m\sin\omega t$ (пунктир) за период, посчитано: ток максимален при $U_C=\mathcal{E}$, напряжение максимально при нулевом токе.

5. Второй способ — эквивалентная катушка. Две параллельные катушки без начальных токов работают как одна с $L=\frac{L_1L_2}{L_1+L_2}$ (общее напряжение, токи складываются: $I=I_1+I_2=\frac{L_1+L_2}{L_2}I_1$). Для контура C — L энергия в момент максимального тока: $C\mathcal{E}^2-\frac{C\mathcal{E}^2}{2}=\frac{LI_m^2}{2}$, $I_m=\mathcal{E}\sqrt{C/L}$. Ток в L_1 — доля $\frac{L_2}{L_1+L_2}$ общего:

$$I_{1m}=\frac{L_2}{L_1+L_2}\,\mathcal{E}\sqrt{\frac{C(L_1+L_2)}{L_1L_2}}=\mathcal{E}\sqrt{\frac{CL_2}{L_1(L_1+L_2)}}$$

— то же самое.

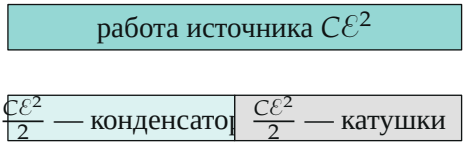


Рис. 3. Энергия в момент максимального тока: работа источника делится поровну между конденсатором и катушками.

Обратите внимание. Работа источника — $\mathcal{E}q$, а не энергия конденсатора. В момент, когда ток равен нулю, $\mathcal{E}\cdot CU_0 = CU_0^2/2$, поэтому максимальное напряжение $U_0 = 2\mathcal{E}$, а не $\mathcal{E}$: по инерции катушек конденсатор «проскакивает» напряжение источника.

Ответ.

$$\mathcal{E} = \frac{U_0}{2}, \qquad I_{1m} = \frac{U_0}{2}\sqrt{\frac{CL_2}{L_1(L_1+L_2)}}$$

Проверка. Размерность: $\sqrt{C/L}$ — $1/\text{Ом}$, $U\sqrt{C/L}$ — ток. Предел: при $L_2 \to \infty$ вторая ветвь не проводит, $I_{1m} \to \frac{U_0}{2}\sqrt{C/L_1}$ — ответ для одной катушки. При $L_1 = L_2$ ток делится пополам: $I_{1m} = \frac{U_0}{2}\sqrt{\frac{C}{2L_1}}$, а $I_m = \frac{U_0}{2}\sqrt{\frac{2C}{L_1}} = 2I_{1m}$ — сходится. Второй способ (пункт 5) дал то же.

Смысл: катушки делят ток обратно своим индуктивностям — через меньшую идёт больший ток.

Ответ. 1) $\mathcal{E} = \frac{U_0}{2}$; 2) $I_{1m} = \frac{U_0}{2}\sqrt{\frac{CL_2}{L_1(L_1+L_2)}}$.