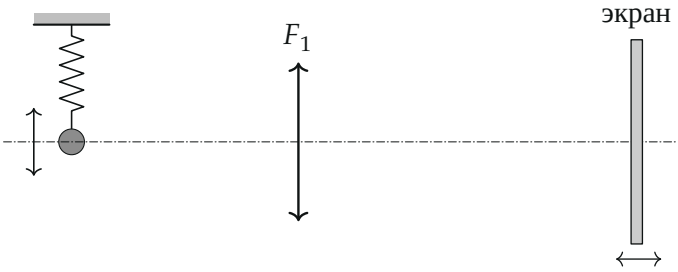
Изображение груза и вторая линза вплотную

Задача 5. [Физтех 2011/12, 11 класс, задача 5] Шарик, висящий на пружине, совершает вертикальные колебания, двигаясь перпендикулярно главной оптической оси линзы с фокусным расстоянием $F_1 = 20$ см. На экране, который можно перемещать, получено изображение шарика. При этом максимальная скорость изображения оказалась в 2 раза больше максимальной скорости шарика.

1. Найдите расстояние между шариком и линзой.
2. Найдите фокусное расстояние F_2 ($F_2 < 0$) рассеивающей линзы, которую надо поместить вплотную к собирающей линзе, чтобы максимальная скорость изображения увеличилась в 3 раза по сравнению с предыдущей.



Поясняющий рисунок. Шарик колеблется вертикально, поперёк главной оптической оси; линза даёт его изображение на подвижном экране.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на линейное (поперечное) увеличение линзы. Экран стоит неподвижно на месте резкого изображения; шарик сдвигается поперёк оси на x — изображение сдвигается поперёк оси на Γx, где $\Gamma = f/d$ — увеличение. Значит, и скорость изображения в Γ раз больше скорости шарика в каждый момент, а с ней и максимальная. Отношение скоростей и есть увеличение, дальше — формула тонкой линзы. Две линзы вплотную — одна линза с суммой оптических сил.

Обозначения. d — расстояние от шарика до линзы, f — от линзы до экрана, $\Gamma_1 = 2$ — увеличение в первом опыте, Γ_2 — во втором, $x(t)$ и $X(t)$ — смещения шарика и его изображения от оси.

1. Скорость изображения — увеличение. Шарик движется в плоскости, перпендикулярной оси, на расстоянии d от линзы; его изображение — в плоскости экрана на расстоянии f. Из подобия треугольников с вершиной в оптическом центре (луч через центр не преломляется, рис. 1) $X = -\Gamma x$, $\Gamma = f/d$; минус — изображение перевёрнутое. Дифференцируя по времени: $V = -\Gamma v$, поэтому

$$\frac{V_{\max}}{v_{\max}} = \Gamma = \frac{f}{d}.$$

Изображение колеблется с тем же периодом, но с размахом в Γ раз больше и в противофазе (рис. 2).

Пункт 1. Расстояние от шарика до линзы.

2. Формула тонкой линзы. Изображение на экране действительное, $f = \Gamma_1 d$:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{\Gamma_1 d} = \frac{1}{F_1} \quad \Rightarrow \quad d = F_1 \frac{\Gamma_1 + 1}{\Gamma_1} = 20 \cdot \frac{3}{2}\ \text{см} = 30\ \text{см}.$$

Экран при этом стоит на $f = 2d = 60$ см.

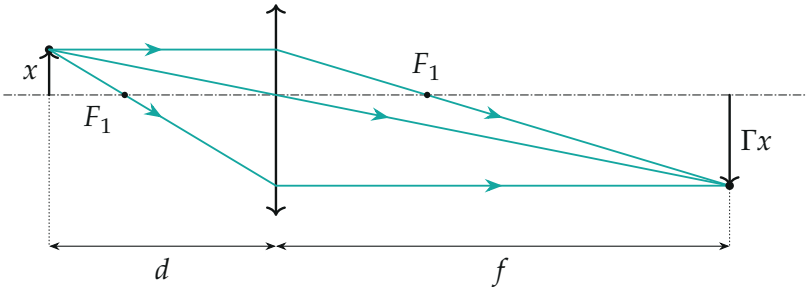


Рис. 1. Построение изображения в первом опыте (посчитано: $d = 30$ см, $F_1 = 20$ см, $f = 60$ см, $\Gamma_1 = 2$).

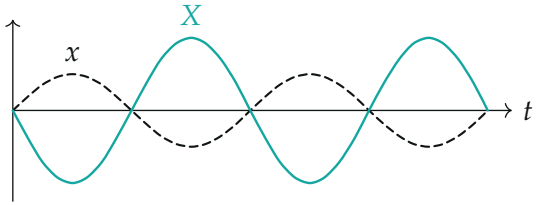


Рис. 2. Смещения шарика $x(t)$ (пунктир) и изображения $X(t) = -\Gamma_1 x(t)$ при $\Gamma_1 = 2$: изображение колеблется в противофазе с вдвое большим размахом, поэтому и наклон графика (скорость) вдвое больше.

Пункт 2. Рассеивающая линза вплотную.

3. Новое увеличение. Шарик остаётся на месте ($d = 30$ см), экран переставляют на резкое изображение. Скорость изображения выросла в 3 раза — значит, увеличение $\Gamma_2 = 3\Gamma_1 = 6$, изображение на $f_2 = \Gamma_2 d = 180$ см.

4. Оптическая сила системы. Две тонкие линзы вплотную — одна тонкая линза с оптической силой $D = D_1 + D_2$, то есть $\frac{1}{F} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2}$. Формула тонкой линзы для системы:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{\Gamma_2 d} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2}.$$

Подставим $d = F_1(\Gamma_1 + 1)/\Gamma_1$:

$$\frac{1}{F_2} = \frac{\Gamma_1(\Gamma_2 + 1)}{\Gamma_2(\Gamma_1 + 1)F_1} - \frac{1}{F_1} = \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{\Gamma_2(\Gamma_1 + 1)F_1}, \qquad F_2 = F_1 \frac{(\Gamma_1 + 1)\Gamma_2}{\Gamma_1 - \Gamma_2}.$$

Численно: $\frac{1}{30} + \frac{1}{180} = \frac{7}{180}$ см$^{-1}$, $\frac{1}{F_2} = \frac{7}{180} - \frac{9}{180} = -\frac{2}{180}$ см$^{-1}$,

$$F_2 = 20 \cdot \frac{3 \cdot 6}{2 - 6}\ \text{см} = -90\ \text{см}.$$

Фокусное расстояние системы $F = 180/7 \approx 25{,}7$ см: рассеивающая линза ослабила собирающую, фокус отодвинулся к шарику ($d = 30$ см чуть больше F), и изображение ушло далеко — поэтому увеличение выросло (рис. 3).

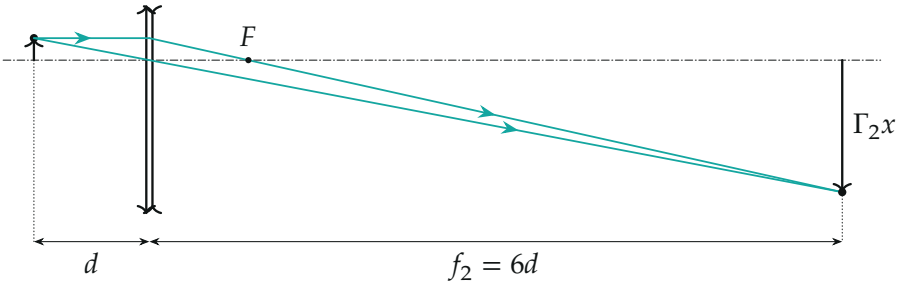


Рис. 3. Система двух линз вплотную (посчитано: $F = 25{,}7$ см, $d = 30$ см, $f_2 = 180$ см).

Обратите внимание. Скорость изображения увеличивается в Γ раз только при смещении поперёк оси. Вдоль оси продольное увеличение другое (Γ^2), но здесь шарик колеблется перпендикулярно оси, так что работает именно Γ.

Ответ.

$$d = F_1\,\frac{\Gamma_1 + 1}{\Gamma_1} = 30\text{ см}, \qquad F_2 = F_1\,\frac{(\Gamma_1+1)\Gamma_2}{\Gamma_1 - \Gamma_2} = -90\text{ см}$$

Проверка. Размерность: обе формулы — F_1 на безразмерный множитель. Знак: $F_2 < 0$, как и требуется, ровно потому, что $\Gamma_2 > \Gamma_1$ — увеличение растёт, когда предмет ближе к фокусу системы, а для этого линзу надо ослабить. Обратно: $\frac{1}{20} - \frac{1}{90} = \frac{7}{180}$, $F = 25{,}7$ см; $\frac{1}{f} = \frac{7}{180} - \frac{1}{30} = \frac{1}{180}$, $f = 180$ см, $\Gamma = 180/30 = 6$ — сходится.

Смысл: слабая рассеивающая линза почти не меняет фокус, но шарик стоит близко к фокусу, и изображение уходит втрое дальше.

Ответ. 1) $d = 30$ см; 2) $F_2 = -90$ см.