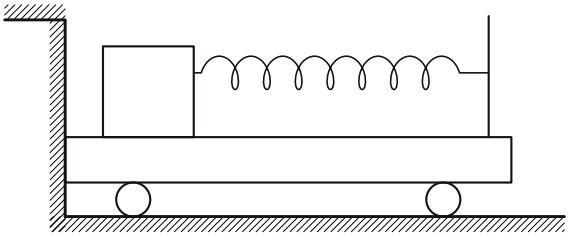
Брусок на тележке, прижатой к упору

Задача 1. [Физтех 2012/13, 11 класс, задача 1] На горизонтальной поверхности стола находится тележка. На шероховатой горизонтальной поверхности тележки находится брусок, прикреплённый к тележке лёгкой упругой пружиной (см. рис.). Масса тележки в 3 раза больше массы бруска. Брусок отклоняют влево так, что удлинение пружины равно x, а тележка прижата к упору. Затем брусок отпускают.



1. Найдите деформацию пружины в момент отрыва тележки от упора.
2. Найдите скорость бруска в момент отрыва тележки от упора.
3. Найдите скорость тележки после прекращения движения по ней бруска.

Известно следующее. Если брусок подвесить на пружине, то деформация пружины равна $2x$. Если брусок тащить по неподвижной тележке с постоянной скоростью, прикладывая горизонтальную силу к прикреплённой к бруску пружине, то деформация пружины равна $\frac{2x}{3}$. Массой колёс тележки и трением в их осях пренебречь. Деформация x пружины меньше длины пружины в ненапряжённом состоянии.

▲ **Решение. Что происходит.** Растянутая пружина тянет брусок вправо, а стойку тележки — влево, к упору. Брусок скользит по шероховатой тележке, трение на него действует влево, а на тележку — вправо, от упора. Пока сила пружины на стойку больше силы трения, тележку прижимает к упору; по мере того как брусок уходит вправо, растяжение уменьшается, и тележка оторвётся, когда сила пружины сравняется с трением. До

отрыва тележка стоит, и энергия бруска с пружиной уменьшается только на работу трения. После отрыва на систему «брусок + тележка» по горизонтали внешние силы не действуют — сохраняется импульс.

Обозначения. k — жёсткость пружины, m — масса бруска, $3m$ — масса тележки, ξ — текущее удлинение пружины, $\xi_{\text{отр}}$ — удлинение в момент отрыва, V — скорость бруска в этот момент, u — общая скорость в конце. Ось x — вправо, от упора.

1. Что дают два опыта. Брусок висит на пружине неподвижно — сила упругости уравновешивает силу тяжести (рис. 1, слева):

$$mg = 2kx \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{m} = \frac{g}{2x}.$$

Брусок тащат за пружину по неподвижной тележке равномерно: сила пружины уравновешивает силу трения скольжения (рис. 1, справа):

$$F_{\text{тр}} = \mu mg = k \cdot \frac{2}{3}x.$$

Сила трения бруска о тележку зависит только от веса бруска, поэтому в нашем опыте она та же.

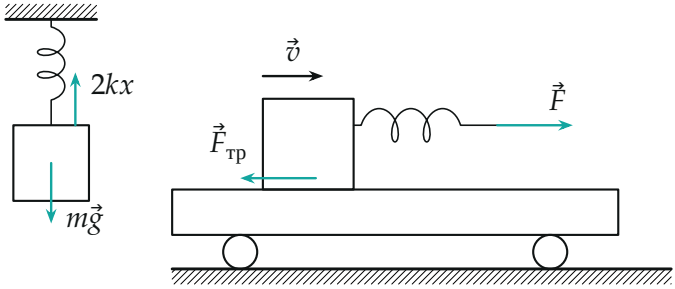


Рис. 1. Слева — брусок висит на пружине; справа — брусок равномерно тащат за пружину по неподвижной тележке.

2. Брусок сдвинется. В начале сила пружины kx больше максимального трения покоя $\frac{2}{3}kx$ — брусок поедет вправо.

3. Пункт 1. Отрыв тележки. Горизонтальные силы на тележку: пружина тянет стойку влево с силой $k\xi$, брусок через трение тянет тележку

вправо с силой μmg, упор давит вправо с силой $N_{ст}$. Второй закон Ньютона для неподвижной тележки в проекции на ось x:

$$N_{ст} + \mu mg - k\xi = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{ст} = k\xi - \mu mg.$$

Брусок уходит вправо, ξ уменьшается, и $N_{ст}$ обращается в ноль при (рис. 2)

$$k\xi_{отр} = \mu mg = \frac{2}{3}kx \quad \Rightarrow \quad \xi_{отр} = \frac{2}{3}x.$$

Пружина в этот момент ещё растянута.

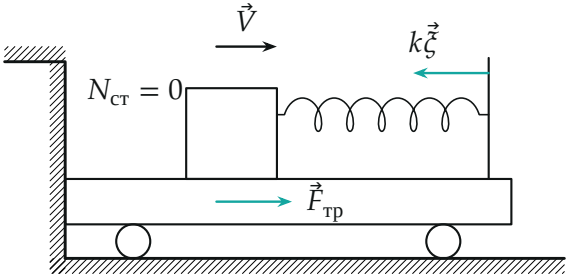


Рис. 2. Горизонтальные силы на тележку в момент отрыва: пружина тянет стойку влево, трение от бруска — вправо, упор уже не давит.

4. Пункт 2. Энергия с учётом трения. До отрыва тележка неподвижна: реакция упора работы не совершает, а сила трения скольжения совершает над бруском работу $-\mu mg \cdot s$, где $s = x - \xi_{отр} = \frac{x}{3}$ — путь бруска по тележке. Изменение механической энергии системы «брусок + пружина» равно работе трения:

$$\frac{k\xi_{отр}^2}{2} + \frac{mV^2}{2} - \frac{kx^2}{2} = -\mu mg\left(x - \xi_{отр}\right).$$

Подставим $\xi_{отр} = \frac{2}{3}x$, $\mu mg = \frac{2}{3}kx$:

$$\frac{mV^2}{2} = \frac{kx^2}{2} - \frac{2kx^2}{9} - \frac{2kx^2}{9} = \frac{kx^2}{18}, \qquad V^2 = \frac{k}{m}\cdot\frac{x^2}{9} = \frac{g}{2x}\cdot\frac{x^2}{9} = \frac{gx}{18},$$

$$V = \frac{\sqrt{gx}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{gx}.$$

Скорость положительна — брусок к моменту отрыва ещё едет вправо, отрыв действительно наступает.

5. Пункт 3. Закон сохранения импульса. После отрыва горизонтальные силы на систему «брусок + тележка» — только внутренние (пружина и трение между бруском и тележкой); стол действует на колёса вертикально (колёса лёгкие, трения в осях нет). Тележка от упора уходит: на неё действует $\mu mg - k\xi > 0$, вправо. Значит, горизонтальный импульс системы сохраняется от момента отрыва (тележка ещё стоит, брусок едет со скоростью V) до момента, когда брусок перестал двигаться по тележке и они едут вместе со скоростью u (рис. 3):

$$mV = (m + 3m)u \quad \Rightarrow \quad u = \frac{V}{4} = \frac{\sqrt{2}}{24}\sqrt{gx}.$$

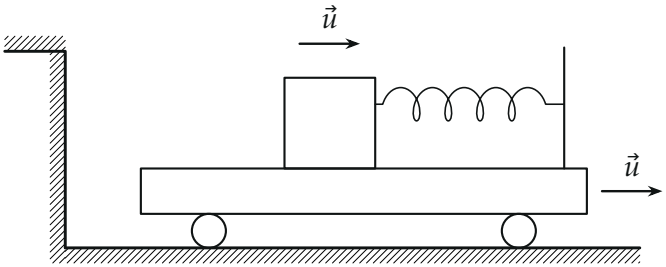


Рис. 3. Брусок больше не скользит по тележке: оба движутся с общей скоростью $\vec{u}$, тележка ушла от упора.

Обратите внимание. Отрыв здесь при *растянутой* пружине: тележку от упора тянет трение бруска, а пружина держит её у упора. И в законе сохранения энергии до отрыва обязательно учесть работу трения: брусок скользит по шероховатой тележке.

Ответ.

$$\xi_{\text{отр}} = \frac{\mu mg}{k} = \frac{2}{3}x, \qquad V = \frac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{gx}, \qquad u = \frac{mV}{4m} = \frac{\sqrt{2}}{24}\sqrt{gx}$$

Проверка. Размерность: $\sqrt{gx}$ — скорость. Баланс энергии: начальная $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{9}{18}kx^2$ распалась на $\frac{4}{18}kx^2$ (пружина), $\frac{4}{18}kx^2$ (тепло) и $\frac{1}{18}kx^2$ (брусок) — сумма сходится. Предел: без трения ($\mu \to 0$) тележка оторвалась бы при $\xi = 0$, и $V = x\sqrt{k/m}$ — наш результат при $\mu = 0$ даёт то же.

Смысл: пока тележку держит упор, импульс системы не сохраняется (упор его меняет); после отрыва импульс бруска делится на всю массу $4m$.

Ответ. 1) $\xi_{\text{отр}} = \frac{2}{3}x$ (пружина растянута); 2) $V = \frac{\sqrt{2}}{6}\sqrt{gx}$; 3) $u = \frac{\sqrt{2}}{24}\sqrt{gx}$.