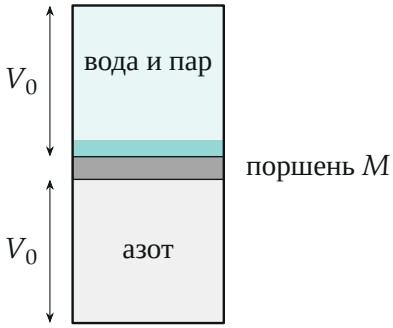
Поршень, вода с паром и азот при 100 °C

Задача 2. [Физтех 2012/13, 11 класс, задача 2] Тяжёлый подвижный поршень площадью $S = 10$ см^2 делит объём вертикально расположенного цилиндра на 2 равные части объёмом $V_0 = 1$ л каждая. Над поршнем находится вода и водяной пар общей массой $m = 2$ г, под поршнем — $m_1 = 2$ г азота. Температура в цилиндре 100 °C. Принять $g = 10$ м/с^2, молярные массы азота и воды $\mu_а = 28$ г/моль и $\mu_в = 18$ г/моль, плотность воды $\rho = 1$ г/см^3.

1. Найдите массу M поршня.
2. Какую часть объёма V_0 занимает жидкая вода?



Поясняющий рисунок. Над поршнем — вода (тонкий слой на поршне) и пар, под поршнем — азот.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на насыщенный пар: сначала предполагаем, что пар над водой насыщенный, потом проверяем это предположение. Если вода и пар находятся вместе в равновесии, пар насыщенный, а при 100 °C давление насыщенного водяного пара — нормальное атмосферное: вода при этой температуре кипит при атмосферном давлении. Значит, давление над поршнем известно без расчёта, $p_н = 10^5$ Па. Под поршнем азот — идеальный газ, его давление даёт уравнение Менделеева — Клапейрона. Разность давлений держит поршень.

Обозначения. $T = 373$ К, $p_н \approx 10^5$ Па — давление насыщенного пара при 100 °C, $p_а$ — давление азота, $m_п$ — масса пара, $m_ж$ — масса жидкой воды, α — доля объёма V_0, занятая жидкостью.

1. Пар насыщенный — проверка предположения. Допустим обратное: вся вода испарилась. Тогда по уравнению Менделеева — Клапейрона давление пара было бы

$$p' = \frac{m}{\mu_в}\frac{RT}{V_0} = \frac{2}{18}\cdot\frac{8{,}31\cdot 373}{10^{-3}}\ \text{Па} \approx 3{,}4\cdot 10^5\ \text{Па} > p_н.$$

Пар при 100 °C не может иметь давление выше насыщенного — лишнее сконденсируется. Поэтому в объёме есть и жидкость, и насыщенный пар (рис. 1): давление над поршнем $p_н = 10^5$ Па. Изотерма воды при $T = 373$ К пересекает уровень $p_н$ при объёме $V_н = mRT/(\mu_в p_н) \approx 3{,}4$ л; наш объём $V_0 = 1$ л меньше, мы на горизонтальном участке.

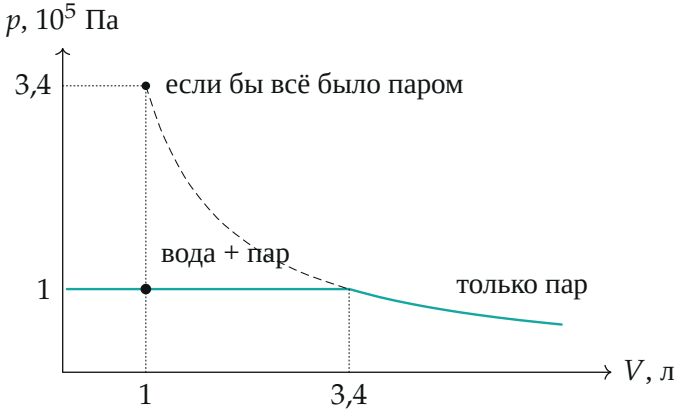


Рис. 1. Изотерма 2 г воды при 100 °C (точки посчитаны): при $V < 3{,}4$ л давление держится на уровне насыщенного. Пунктир — закон идеального газа без конденсации.

2. Масса поршня — условие равновесия поршня. Запишем второй закон Ньютона для покоящегося поршня в проекции на вертикальную ось y вверх. На поршень действуют сила тяжести Mg вниз, сила давления пара $p_н S$ вниз и сила давления азота $p_а S$ вверх (рис. 2):

$$p_а S - p_н S - Mg = 0.$$

Слой воды на поршне тоже давит на него, но его вес входит в давление

на дно этого слоя: давление под водой больше $p_н$ на $\rho g \alpha V_0/S$ — это ~ 10 Па, в 10^4 раз меньше остальных, им пренебрегаем.

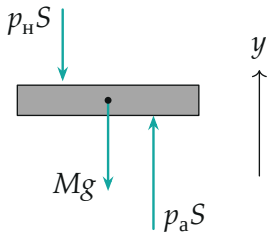


Рис. 2. Силы, действующие на поршень.

Давление азота — из уравнения Менделеева — Клапейрона, азот занимает объём V_0:

$$p_а = \frac{m_1}{\mu_а}\frac{RT}{V_0} = \frac{2}{28}\cdot\frac{8{,}31\cdot 373}{10^{-3}}\text{ Па} \approx 2{,}21\cdot 10^5\text{ Па}.$$

Отсюда

$$M = \frac{S}{g}\left(\frac{m_1 RT}{\mu_а V_0} - p_н\right) = \frac{10^{-3}}{10}\left(2{,}21\cdot 10^5 - 10^5\right)\text{ кг} \approx 12\text{ кг}.$$

3. Доля объёма жидкости — уравнение состояния пара. Пар занимает объём над поршнем за вычетом объёма жидкости, $V_0(1-\alpha)$ (рис. 3). Жидкости $m_ж = \rho\alpha V_0$, пара $m_п = m - \rho\alpha V_0$. Уравнение Менделеева — Клапейрона для насыщенного пара:

$$p_н V_0(1-\alpha) = \frac{m-\rho\alpha V_0}{\mu_в}RT.$$

Так как $\alpha \ll 1$ (проверим ниже), слева $1-\alpha \approx 1$. Тогда масса пара

$$m_п = \frac{p_н V_0 \mu_в}{RT} = \frac{10^5\cdot 10^{-3}\cdot 18}{8{,}31\cdot 373}\text{ г} \approx 0{,}58\text{ г},$$

жидкости $m_ж = m - m_п \approx 1{,}42$ г, её объём 1,42 см^3, и

$$\alpha = \frac{1}{\rho V_0}\left(m - \frac{p_н V_0 \mu_в}{RT}\right) = \frac{1{,}42\ \text{см}^3}{1000\ \text{см}^3} \approx 1{,}4 \cdot 10^{-3}.$$

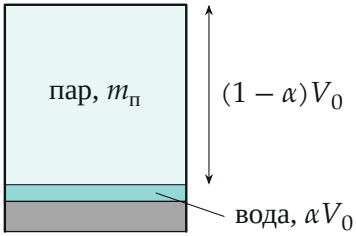


Рис. 3. Над поршнем: жидкость занимает долю α объёма V_0 (толщина слоя на рисунке сильно преувеличена), пар — остальное.

Учёт множителя $1 - \alpha$ меняет массу пара на долю $\alpha \sim 10^{-3}$ — это за пределами точности данных.

Обратите внимание. Давление пара здесь не считают из массы: всю воду нельзя считать паром, иначе $3{,}4 \cdot 10^5$ Па, больше насыщенного. Пар насыщенный, и его давление при 100 °C задано самой температурой — это атмосферное давление.

Ответ.

$$M = \frac{S}{g}\left(\frac{m_1 RT}{\mu_а V_0} - p_н\right) \approx 12\ \text{кг},$$
$$\alpha = \frac{1}{\rho V_0}\left(m - \frac{p_н V_0 \mu_в}{RT}\right) \approx 1{,}4 \cdot 10^{-3}$$

Проверка. Размерность: $m_1 RT/(\mu V_0)$ — давление, pS/g — масса; $m/(\rho V_0)$ — безразмерная доля. Знак: $\alpha > 0$ ровно потому, что m больше массы пара, способного существовать в объёме V_0 (0,58 г), — то же условие, что в пункте 1. Если бы воды было меньше 0,58 г, жидкости не осталось бы и давление над поршнем было бы ниже атмосферного.

Смысл: над поршнем держится атмосферное давление насыщенного пара, а давление азота больше примерно вдвое: разница держит поршень массой около 12 кг.

Ответ. 1) $M \approx 12$ кг; 2) $\alpha \approx 1{,}4 \cdot 10^{-3}$.