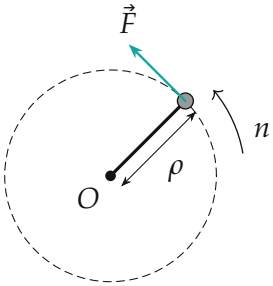
Генератор или мотор: баланс мощностей

Задача 3. [Физтех 2012/13, 11 класс, задача 3] Для подзарядки аккумулятора используется динамомашина (генератор) с сопротивлением обмотки ротора $R = 1$ Ом. Человек вращает ручку динамомашины с частотой $n = 1$ об/с, прикладывая к ней силу $F = 20$ Н на расстоянии $\rho = 8$ см от оси вращения вдоль направления движения ручки. Через аккумулятор идёт ток $I = 1$ А. Из-за трения в механизмах динамомашины теряется 20 % затрачиваемой человеком мощности. Считать, что ротор вращается между полюсами постоянного магнита.

1. Какую мощность затрачивает человек?
2. Найдите напряжение на зажимах динамомашины.



Поясняющий рисунок. Ручка на расстоянии ρ от оси O движется по окружности; сила $\vec{F}$ направлена вдоль скорости ручки.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Задача на закон сохранения энергии в электромеханической системе. Человек совершает механическую работу; пятая часть её уходит на трение, остальное становится работой сторонних сил генератора — его ЭДС. Эта электрическая мощность делится на нагрев обмотки ротора и мощность, отданную во внешнюю цепь (в аккумулятор), — она и задаёт напряжение на зажимах.

Обозначения. v — скорость ручки, P — мощность человека, $\eta = 0{,}2$ — доля мощности, теряемая на трение, $\mathcal{E}$ — ЭДС генератора, U — напряжение на его зажимах.

1. Мощность человека. Мощность силы — скалярное произведение силы на скорость точки приложения: $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$. Сила направлена вдоль

движения ручки, поэтому $P = Fv$. Ручка за один оборот проходит окружность длиной $2\pi\rho$, а оборотов в секунду n:

$$v = 2\pi n\rho = 2\pi \cdot 1 \cdot 0{,}08 \text{ м/с} \approx 0{,}50 \text{ м/с}, \qquad P = Fv \approx 10 \text{ Вт}.$$

По-другому то же самое: момент силы $M = F\rho$, угловая скорость $\omega = 2\pi n$, мощность $M\omega = 2\pi n\rho F$.

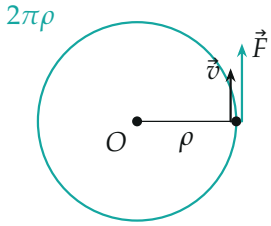


Рис. 1. За оборот ручка проходит окружность $2\pi\rho$; скорость $\vec{v}$ и сила $\vec{F}$ направлены по касательной в одну сторону.

2. Электрическая схема. Генератор — источник с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением R (обмотка ротора). К его зажимам a, b подключён аккумулятор, ток в цепи I (рис. 2). Напряжение на зажимах — то, что остаётся от ЭДС после падения на обмотке: $U = \mathcal{E} - IR$.

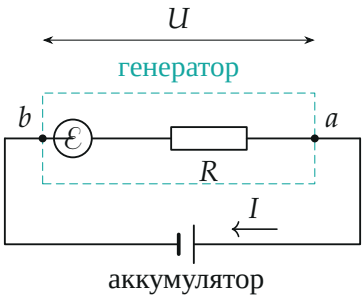


Рис. 2. Эквивалентная схема: генератор — ЭДС $\mathcal{E}$ с внутренним сопротивлением R; на зажимах a, b напряжение U, ток I заряжает аккумулятор.

3. Баланс мощностей — закон сохранения энергии. За единицу времени человек совершает работу P. Из неё ηP уходит на трение, осталь-

ное — работа ЭДС $\mathcal{E}I$ (вращая ротор в поле магнита, человек преодолевает тормозящую силу Ампера, и именно эта работа становится электрической). Работа ЭДС идёт на джоулево тепло в обмотке I^2R и мощность, отданную аккумулятору, UI (рис. 3):

$$P = \eta P + I^2R + UI.$$

Отсюда

$$U = \frac{(1-\eta)P - I^2R}{I} = \frac{0{,}8 \cdot 10{,}05 - 1^2 \cdot 1}{1}\ \text{В} \approx 7\ \text{В}.$$

Тот же результат через ЭДС: $\mathcal{E}I = (1-\eta)P \approx 8{,}0$ Вт, $\mathcal{E} \approx 8{,}0$ В, и $U = \mathcal{E} - IR \approx 8{,}0 - 1 = 7{,}0$ В.

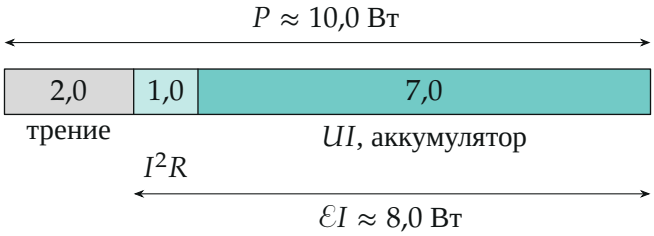


Рис. 3. Куда идёт мощность человека (длины отрезков — в масштабе, ватты).

Обратите внимание. На зажимах — не ЭДС: часть мощности генератора греет его собственную обмотку. Поэтому UI меньше $\mathcal{E}I$ на I^2R.

Ответ.

$$\boxed{\begin{aligned} P &= 2\pi n \rho F \approx 10\ \text{Вт}, \\ U &= \frac{(1-\eta)\,2\pi n\rho F - I^2R}{I} \approx 7\ \text{В} \end{aligned}}$$

Проверка. Размерность: $n\rho F$ — Н·м/с = Вт; Вт/А = В. Предел: без трения и сопротивления ($\eta = 0$, $R = 0$) вся мощность человека шла бы в аккумулятор, $UI = P$ — формула это даёт. Знак: $U > 0$, пока $(1-\eta)P > I^2R$; иначе человек не смог бы поддерживать такой ток.

Смысл: из 10 Вт, которые тратит человек, аккумулятор получает 7 Вт.

Ответ. 1) $P = 2\pi n \rho F \approx 10$ Вт; 2) $U \approx 7$ В.