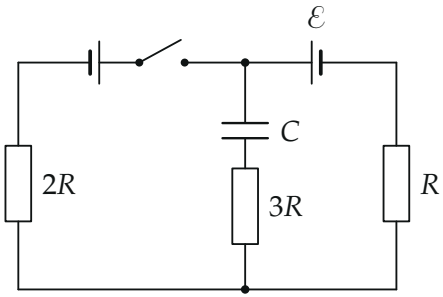
Тепло после размыкания в цепи с конденсатором

Задача 4. [Физтех 2012/13, 11 класс, задача 4] В схеме, показанной на рисунке, все элементы можно считать идеальными, известные параметры элементов указаны на рисунке, неизвестная ЭДС меньше $\mathcal{E}$. Ключ замыкают и дожидаются установления стационарного режима. Затем ключ размыкают, после чего в схеме выделяется количество теплоты, равное $\frac{1}{18}C\mathcal{E}^2$.



1. Какое количество теплоты выделилось в резисторе $3R$ после размыкания ключа?
2. Найдите силу тока, протекавшего в схеме в стационарном режиме.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Задача на перезарядку конденсатора через резисторы. Пока ключ замкнут, в установившемся режиме ток через ветвь с конденсатором не идёт, и ток I течёт по внешнему контуру через оба источника и резисторы $2R$ и R. Конденсатор при этом заряжен до напряжения, которое задают $\mathcal{E}$ и падение напряжения на R. После размыкания остаётся один контур: $\mathcal{E}$, R, $3R$, C. Конденсатор дозаряжается до $\mathcal{E}$, а теплота выделяется в R и $3R$. Ключевой закон — сохранение энергии: работа источника = изменение энергии конденсатора + теплота.

Обозначения. $\mathcal{E}_1$ — неизвестная ЭДС, I — ток в стационарном режиме при замкнутом ключе, U_0 — напряжение на конденсаторе в этом режиме, $Q = \frac{1}{18}C\mathcal{E}^2$ — вся теплота после размыкания, Δq — заряд, прошедший через источник $\mathcal{E}$ после размыкания. Полярность источников — по рисунку условия: длинная пластина — «+».

Пункт 1. Теплота в резисторе $3R$**.**

1. Какой ток идёт после размыкания. После размыкания ключа левая ветвь (с $\mathcal{E}_1$ и $2R$) разорвана, ток $i(t)$ идёт только по контуру $\mathcal{E}$ — R — $3R$ — C (рис. 1). Резисторы R и $3R$ соединены последовательно: в каждый момент через них течёт один и тот же ток $i(t)$.

2. Закон Джоуля — Ленца. За малый промежуток dt в резисторах выделяется $i^2R\,dt$ и $i^2\cdot 3R\,dt$ — всегда в отношении $1:3$. Суммируя от размыкания до конца перезарядки, получаем то же отношение для полных теплот: $Q_{3R}=\frac{3}{4}Q$,

$$Q_{3R}=\frac{3R}{3R+R}\cdot\frac{1}{18}C\mathcal{E}^2=\frac{1}{24}C\mathcal{E}^2.$$

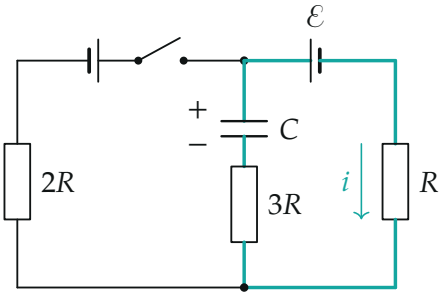


Рис. 1. После размыкания ток $i(t)$ идёт по одному контуру $\mathcal{E}$ — R — $3R$ — C и дозаряжает конденсатор.

Пункт 2. Ток в стационарном режиме.

3. Ток при замкнутом ключе. В установившемся режиме заряд конденсатора не меняется, ток через ветвь C — $3R$ равен нулю. Ток I идёт по контуру $\mathcal{E}_1$ — ключ — $\mathcal{E}$ — R — $2R$ (рис. 2). Источники включены навстречу (оба «+» смотрят на узел N), и $\mathcal{E}>\mathcal{E}_1$, поэтому ток идёт так, как его гонит $\mathcal{E}$: через $\mathcal{E}$ от «−» к «+», то есть к узлу N, а через R — снизу вверх. По закону Ома для замкнутой цепи $I=(\mathcal{E}-\mathcal{E}_1)/(3R)$.

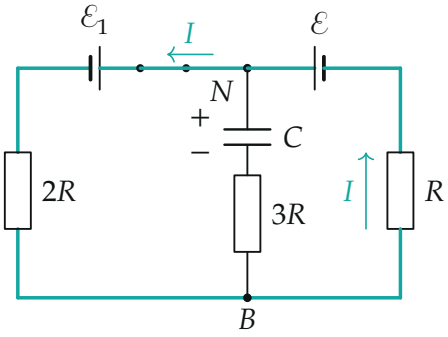


Рис. 2. Ключ замкнут, режим установился: ток I идёт по выделенному контуру, через конденсатор ток не идёт.

4. Напряжение на конденсаторе до размыкания. Тока в ветви C — $3R$ нет, на $3R$ нет падения напряжения, и напряжение на конденсаторе равно $\varphi_N - \varphi_B$. Пройдём от N к B через правую ветвь: через $\mathcal{E}$ от «+» к «−» потенциал падает на $\mathcal{E}$, через R по направлению, противоположному току, — растёт на IR:

$$U_0 = \varphi_N - \varphi_B = \mathcal{E} - IR.$$

После размыкания в конце тока нет, и напряжение на конденсаторе становится $\mathcal{E}$: конденсатор дозаряжается на IR (рис. 3).

5. Закон сохранения энергии для перезарядки. Через источник $\mathcal{E}$ проходит заряд $\Delta q = C\mathcal{E} - CU_0 = CIR$ от «−» к «+», работа источника $A = \mathcal{E}\Delta q = C\mathcal{E}IR$. Энергия конденсатора меняется на

$$\Delta W = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} - \frac{C(\mathcal{E} - IR)^2}{2} = C\mathcal{E}IR - \frac{C(IR)^2}{2}.$$

Закон сохранения энергии $A = \Delta W + Q$ даёт

$$Q = A - \Delta W = \frac{C(IR)^2}{2}.$$

Теплота равна $\frac{C(\Delta U)^2}{2}$, где $\Delta U = IR$ — скачок, на который источник «дотягивает» конденсатор.

6. Ток. Приравняем к данному:

$$\frac{C(IR)^2}{2} = \frac{1}{18}C\mathcal{E}^2, \qquad IR = \frac{\mathcal{E}}{3}, \qquad I = \frac{\mathcal{E}}{3R}.$$

Напряжение на конденсаторе до размыкания было $U_0 = \frac{2}{3}\mathcal{E}$, после — $\mathcal{E}$.

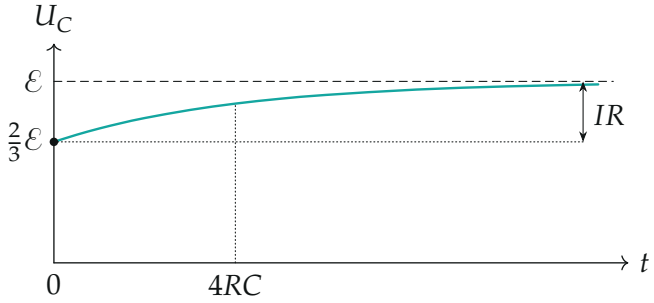


Рис. 3. Напряжение на конденсаторе после размыкания (посчитано по $U_C = \mathcal{E} - IR\,e^{-t/(4RC)}$): от $\frac{2}{3}\mathcal{E}$ до $\mathcal{E}$.

7. Проверка вторым способом — прямым интегрированием. После размыкания ток в контуре $i = \frac{IR}{4R}e^{-t/(4RC)}$ (сопротивление контура $4R$, начальная разность «ЭДС минус напряжение конденсатора» — IR). Теплота

$$Q = \int_0^\infty i^2 \cdot 4R\,dt = \frac{(IR)^2}{4R} \cdot \frac{4RC}{2} = \frac{C(IR)^2}{2}$$

— то же, что из закона сохранения энергии.

Обратите внимание. Теплота при перезарядке не равна изменению энергии конденсатора: источник совершает работу $\mathcal{E}\Delta q$, и теплота — это разность $A - \Delta W$. И напряжение на конденсаторе в стационарном режиме — не $\mathcal{E}$: ток через R снижает его на IR.

Ответ.

$$Q_{3R} = \frac{3}{4}Q = \frac{1}{24}C\mathcal{E}^2, \qquad I = \sqrt{\frac{2Q}{CR^2}} = \frac{\mathcal{E}}{3R}$$

Проверка. Размерность: $C\mathcal{E}^2$ — энергия; $\mathcal{E}/R$ — ток. Предел: при $I \to$

0 конденсатор уже заряжен до $\mathcal{E}$, перезарядки нет, $Q \to 0$ — формула $Q = C(IR)^2/2$ это даёт. Распределение тепла не зависит от C и I — только от отношения сопротивлений.

Смысл: выделившаяся теплота «измеряет» падение напряжения на R в стационарном режиме, а через него — ток.

Ответ. 1) $Q_{3R} = \dfrac{1}{24} C\mathcal{E}^2$; 2) $I = \dfrac{\mathcal{E}}{3R}$.