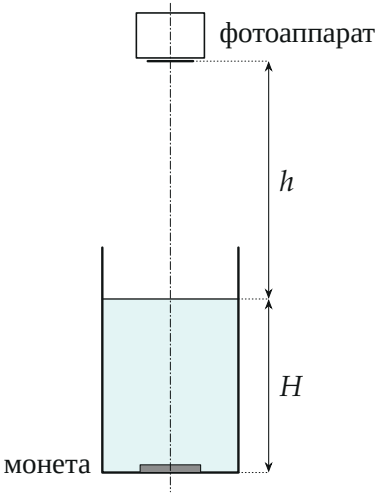
Монета на дне мензурки: преломление и фотоснимок

Задача 5. [Физтех 2012/13, 11 класс, задача 5] Для определения показателя преломления неизвестной прозрачной жидкости экспериментатор Глюк положил на дно мензурки монету и налил в неё исследуемую жидкость. Толщина слоя жидкости $H = 27$ см. Далее он сфотографировал монету с высоты $h = 37$ см над поверхностью жидкости и получил резкое изображение, диаметр которого в $k = 10$ раз меньше диаметра монеты. Фокусное расстояние объектива $F = 50$ мм. Оптическая ось объектива перпендикулярна поверхности жидкости.

1. Какое расстояние d было установлено на шкале дальности объектива?
2. Найдите показатель преломления n жидкости.



Поясняющий рисунок (вертикальный масштаб соблюдён): объектив на высоте h над жидкостью, монета на дне под слоем H.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на систему двух оптических элементов: плоская граница жидкости, затем объектив. Лучи от монеты преломляются на поверхности жидкости и выходят так, будто идут от

мнимого изображения монеты, приподнятого над дном. Для объектива предметом служит именно это изображение. Расстояние до него объектив «знает» из формулы тонкой линзы и увеличения, а положение этого изображения даёт показатель преломления.

Обозначения. S — точка монеты на оси, S^* — её изображение в плоской границе на глубине x под поверхностью, d — расстояние от объектива до S^* (оно и стоит на шкале дальности), f — расстояние от объектива до плёнки (матрицы), $\Gamma = 1/k$ — увеличение объектива, β и α — углы луча с нормалью в жидкости и в воздухе.

1. Изображение монеты в плоской поверхности — закон преломления. Луч из S идёт в жидкости под углом β к нормали, выходит в воздух под углом α (рис. 1): $\sin\alpha = n\sin\beta$. Точку выхода K видно из S и из S^* (продолжение преломлённого луча):

$$OK = H\operatorname{tg}\beta = x\operatorname{tg}\alpha \quad \Rightarrow \quad x = H\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Объектив диаметром несколько сантиметров с расстояния больше полуметра собирает лучи под малыми углами к оси, поэтому $\operatorname{tg} \approx \sin$:

$$x = H\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{H}{n}.$$

Плоская граница даёт прямое изображение в натуральную величину: каждая точка монеты поднимается на одно и то же $H - H/n$ по вертикали, поперечные размеры не меняются. Значит, предмет для объектива — «монета того же диаметра» на глубине H/n.

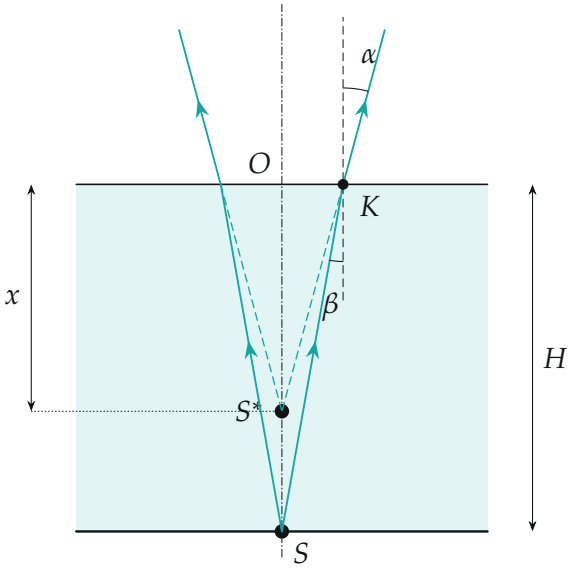


Рис. 1. Лучи от точки S на дне после преломления выходят так, будто идут из S (посчитано для $n = 1{,}5$, $\beta = 10°$).*

2. Расстояние на шкале дальности — формула тонкой линзы. Шкала дальности показывает расстояние до предмета, на который наведена резкость, — до S^*. Изображение на плёнке действительное и уменьшенное в k раз, увеличение $\Gamma = f/d = 1/k$, то есть $f = d/k$. Формула тонкой собирающей линзы (рис. 2):

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{d}+\frac{k}{d}=\frac{1}{F} \quad \Rightarrow \quad d = F(k+1) = 50\text{ мм}\cdot 11 = 55\text{ см}.$$

Плёнка при этом стоит на $f = d/k = 5{,}5$ см от объектива — чуть дальше фокуса.

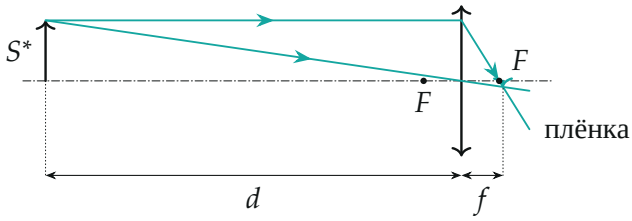


Рис. 2. Объектив строит на плёнке изображение предмета S^*, уменьшенное в $k = 10$ раз (ось повёрнута горизонтально; масштаб по оси соблюдён, размер предмета условный).

3. Показатель преломления — геометрия вдоль оси. От объектива до S^*: сначала h в воздухе, затем H/n под поверхностью (рис. 3):

$$d = h + \frac{H}{n} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{H}{d-h} = \frac{H}{F(k+1)-h} = \frac{27}{55-37} = 1{,}5.$$

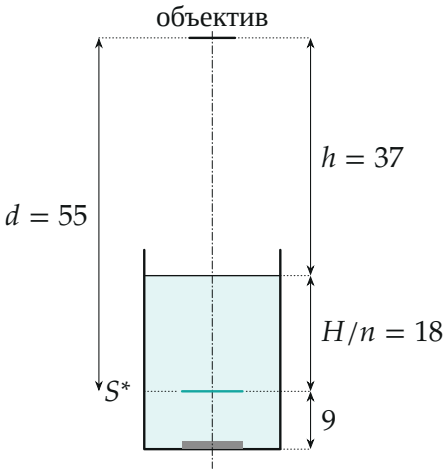


Рис. 3. Расстояния вдоль оси, см (масштаб соблюдён): изображение монеты S^* поднято над дном на 9 см.

Обратите внимание. На шкале дальности не $h + H = 64$ см, а расстояние до изображения монеты: объектив фокусируется на то, откуда лучи кажутся идущими. И увеличение $1/k$ относится к этому изображению, но оно того же размера, что монета, — поэтому можно говорить о размере самой монеты.

Ответ.

$$d = F(k+1) = 55 \text{ см}, \qquad n = \frac{H}{F(k+1)-h} = 1{,}5$$

Проверка. Размерность: d — длина, n — отношение длин. Предел: без жидкости ($n = 1$) $d = h + H$ — объектив наводится на саму монету. Число: $n = 1{,}5$ — разумный показатель для прозрачной жидкости (у глицерина 1,47). Обратно: $d = 37 + 27/1{,}5 = 55$ см, $f = 5{,}5$ см, $1/55 + 1/5{,}5 = 1/5$ — сходится.

Смысл: жидкость «поднимает» монету на 9 см, и фотоаппарат, наведённый на резкость, это замечает.

Ответ. 1) $d = F(k + 1) = 55$ см; 2) $n = 1{,}5$.