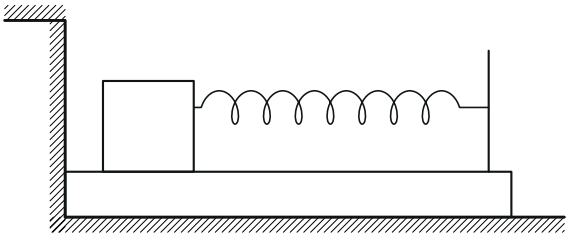
Брусок на доске у упора

Задача 1. [Физтех 2012/13, 11 класс, задача 1] Доска находится на шероховатой горизонтальной поверхности стола. На гладкой верхней горизонтальной поверхности доски находится брусок, прикреплённый к доске лёгкой упругой пружиной (см. рис.). Брусок отклоняют влево так, что пружина растянута на величину x, а доска прижата к упору. Затем брусок отпускают.



1. Найдите деформацию пружины в момент отрыва доски от упора.
2. Найдите скорость бруска в момент отрыва доски от упора.

Известно следующее. Если брусок подвесить на пружине, то деформация пружины равна $\frac{x}{7}$. Если брусок с доской двигать по столу с постоянной скоростью, прикладывая горизонтальную силу к бруску, то деформация сжатой пружины равна $\frac{3x}{4}$. Все деформации пружины меньше длины пружины в ненапряжённом состоянии.

▲ **Решение. Что происходит.** Пока пружина растянута, она тянет стойку доски влево — доска прижата к упору и стоит. Брусок скользит по гладкой доске вправо, проходит положение, где пружина не деформирована, и начинает её сжимать. Сжатая пружина толкает доску вправо, от упора; доска сорвётся, когда эта сила дорастёт до максимальной силы трения покоя о стол. До этого момента доска неподвижна, поэтому энергия бруска с пружиной сохраняется. Два «известных» опыта нужны, чтобы выразить через k и x вес бруска и силу трения.

Обозначения. k — жёсткость пружины, m — масса бруска, M — масса доски, μ — коэффициент трения доски о стол, $x_{\text{отр}}$ — сжатие пружи-

ны в момент отрыва, V — скорость бруска в этот момент. Ось x направлена вправо, от упора.

1. Что дают два опыта. Брусок, подвешенный на пружине, покоится: по второму закону Ньютона для бруска сила упругости уравновешивает силу тяжести (рис. 1, слева),

$$k\frac{x}{7} = mg \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{m} = \frac{7g}{x}.$$

Во втором опыте брусок и доска едут вместе равномерно. Брусок давит на доску только через пружину (поверхность гладкая), и для бруска $F = k \cdot \frac{3}{4}x$. Для системы «брусок + доска» по горизонтали действуют $\vec{F}$ и сила трения скольжения о стол $\mu(M + m)g$ — стол давит на доску с силой $(M + m)g$, ведь брусок лежит на доске (рис. 1, справа). Скорость постоянна, значит,

$$F_{\text{тр}} = \mu(M + m)g = \frac{3}{4}kx.$$

Максимальную силу трения покоя считаем равной силе трения скольжения.

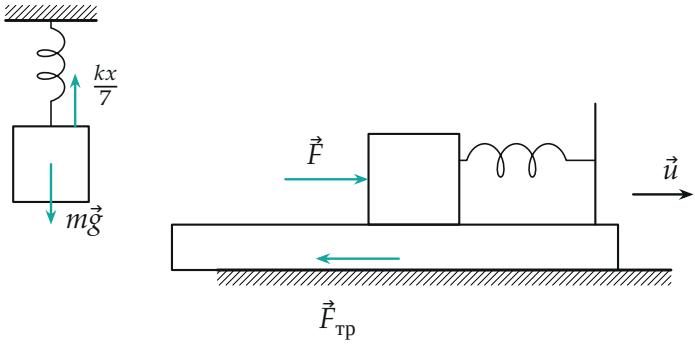


Рис. 1. Слева — брусок висит на пружине; справа — брусок с доской равномерно движутся под действием силы $\vec{F}$ (вертикальные силы на правой части не показаны).

2. Почему доска сначала стоит. Пока пружина растянута, на стойку доски она действует влево, к упору. Упор отвечает силой реакции впра-

во — доска неподвижна, трение о стол не нужно. Когда пружина начинает сжиматься, её сила на стойку меняет направление на «вправо», упор перестаёт давить ($N_{ст} = 0$), и удерживает доску только трение покоя о стол. Сила упругости растёт по мере сжатия (рис. 3), и доска сорвётся, как только она превысит максимальное трение покоя (рис. 2).

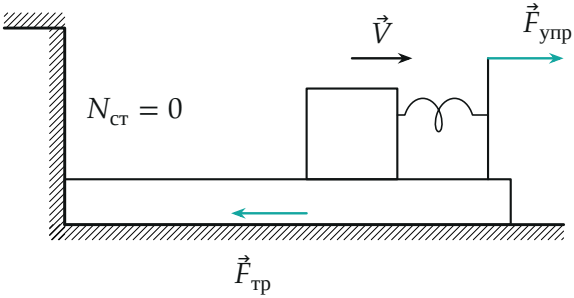


Рис. 2. Горизонтальные силы на доску в момент отрыва: пружина толкает стойку вправо, трение о стол — влево, упор уже не давит.

3. Пункт 1. Сжатие пружины при отрыве. Второй закон Ньютона для доски в проекции на ось x в момент отрыва (ускорение ещё нулевое, трение покоя максимально):

$$kx_{отр} - \mu(M+m)g = 0 \quad \Rightarrow \quad kx_{отр} = \frac{3}{4}kx, \qquad x_{отр} = \frac{3}{4}x.$$

Брусок до этого сжатия дойдёт: без отрыва доски он сжал бы пружину на все x (энергия сохраняется), а $\frac{3}{4}x < x$.

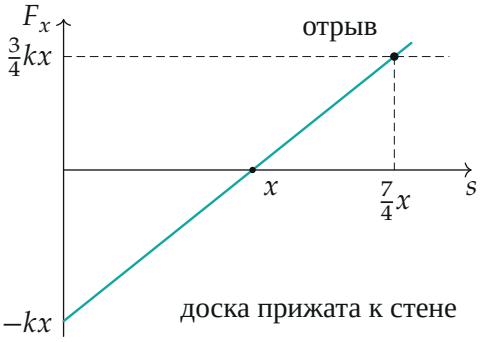


Рис. 3. Проекция силы пружины на доску в зависимости от пути бруска s: сначала $F_x < 0$ — доску прижимает к упору; при $s = \frac{7}{4}x$ сила доходит до $\frac{3}{4}kx$ — отрыв.

4. Пункт 2. Закон сохранения энергии. До отрыва доска неподвижна, поэтому сила трения о стол и реакция упора работы не совершают (их точки приложения не движутся), а брусок скользит без трения. Сохраняется механическая энергия системы «брусок + пружина» от момента отпускания до момента отрыва:

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{kx_{\text{отр}}^2}{2} + \frac{mV^2}{2} \quad \Rightarrow \quad V^2 = \frac{k}{m}\left(x^2 - \frac{9}{16}x^2\right) = \frac{7g}{x}\cdot\frac{7}{16}x^2 = \frac{49}{16}gx.$$

$$V = \frac{7}{4}\sqrt{gx}.$$

Обратите внимание. Сила трения доски о стол — это $\mu(M+m)g$, а не μMg: брусок лежит на доске и давит на неё. Именно поэтому опыт с протаскиванием «бруска с доской» сразу даёт нужную силу, и массы M и μ знать не нужно.

Ответ.

$$x_{\text{отр}} = \frac{3}{4}x, \qquad V = \sqrt{\frac{k}{m}\left(x^2 - x_{\text{отр}}^2\right)} = \frac{7}{4}\sqrt{gx}$$

Проверка. Размерность: $\sqrt{gx}$ — скорость. Предел: если бы трение было ничтожным ($x_{\text{отр}} \to 0$), доска сорвалась бы при недеформированной пружине, и брусок имел бы наибольшую скорость $x\sqrt{k/m} = \sqrt{7gx}$; у нас $V = \frac{7}{4}\sqrt{gx} \approx 0{,}66\sqrt{7gx}$ — меньше, часть энергии уже снова в пружине. Числа: $\frac{49}{16} = 7 \cdot \frac{7}{16}$ — верно.

Смысл: пока доска стоит, брусок просто колеблется на пружине, и его скорость при сжатии $x_{\text{отр}}$ даёт закон сохранения энергии гармонического осциллятора.

Ответ. 1) $x_{\text{отр}} = \frac{3}{4}x$ (пружина сжата); 2) $V = \frac{7}{4}\sqrt{gx}$.