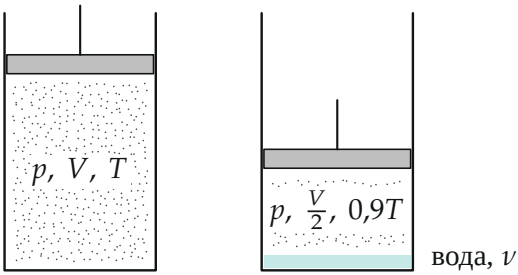
Изобарное охлаждение водяного пара

Задача 2. [Физтех 2012/13, 11 класс, задача 2] В цилиндре под поршнем находится водяной пар при температуре T. При изобарическом охлаждении цилиндра объём уменьшается в 2 раза, а температура — на 10 %. К концу охлаждения в цилиндре образовалось ν молей жидкости, объём которой намного меньше объёма пара. Найдите работу, совершённую над содержимым цилиндра в этом процессе. Пар считать идеальным газом.



Поясняющий рисунок. Давление постоянно; в конце на дне — ν молей воды (объём пренебрежимо мал).

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на насыщенный пар и уравнение Менделеева — Клапейрона. Процесс изобарный, поэтому работа над содержимым — просто $p\,\Delta V$. Неизвестно ни давление, ни объём, ни число молей пара; но записав уравнение состояния пара в начале и в конце, мы выразим pV через νRT: часть пара превратилась в воду, и именно эти ν молей «объясняют», почему объём упал сильнее, чем температура.

Обозначения. p — давление (постоянно), V — начальный объём, ν_0 — начальное число молей пара, $\nu_0 - \nu$ — пара в конце, A — работа над содержимым.

1. Как идёт процесс. Сначала пар ненасыщенный и охлаждается как обычный газ: при $p = \text{const}$ объём пропорционален температуре, $V \propto T$. Когда температура упала до температуры кипения при давлении p, пар стал насыщенным; дальше при постоянном давлении температура насыщенного пара постоянна, и уменьшение объёма идёт за счёт конденсации. По условию температура упала на 10 %, объём — в два раза: значит,

до $0{,}9T$ и $0{,}9V$ пар охлаждался, а от $0{,}9V$ до $\frac{V}{2}$ — конденсировался при $0{,}9T$ (рис. 1).

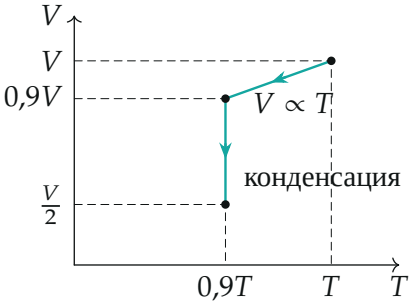


Рис. 1. Процесс на диаграмме $V(T)$ при $p = \text{const}$ (схема, масштаб не соблюдён): охлаждение ненасыщенного пара, затем конденсация при постоянной температуре.

2. Работа. Давление постоянно, объём жидкости мал, поэтому работа над содержимым — площадь прямоугольника на диаграмме $p(V)$ (рис. 2):

$$A = p\left(V - \frac{V}{2}\right) = \frac{pV}{2}.$$

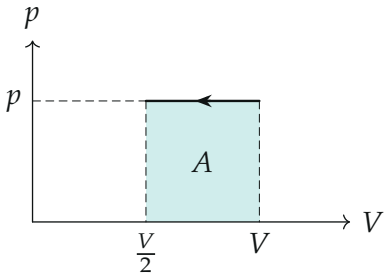


Рис. 2. Работа над содержимым при изобарном сжатии — площадь прямоугольника.

3. Уравнения состояния пара. Уравнение Менделеева — Клапейрона для пара (жидкость в нём не участвует, её объём мал) в начале и в конце:

$$pV = \nu_0 RT, \qquad p\,\frac{V}{2} = (\nu_0 - \nu)R \cdot 0{,}9T.$$

Неизвестных ν_0 и pV два, уравнений два. Из первого $\nu_0 RT = pV$; подставим во второе:

$$\frac{pV}{2} = 0{,}9\,pV - 0{,}9\,\nu RT \quad\Rightarrow\quad 0{,}4\,pV = 0{,}9\,\nu RT, \qquad pV = \frac{9}{4}\nu RT.$$

4. Ответ.

$$A = \frac{pV}{2} = \frac{9}{8}\nu RT.$$

Работа положительна: поршень опускается, над содержимым работу совершают извне.

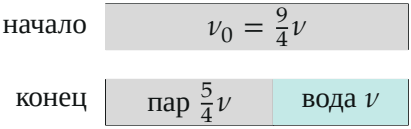


Рис. 3. Куда делись моли: из $\frac{9}{4}\nu$ молей пара ν превратились в воду (доли в масштабе).

Обратите внимание. Нельзя писать $pV/T = \text{const}$ для всего процесса: пар частично стал водой, число молей газа уменьшилось. И температура в конце — $0{,}9T$, а не T: без этого множителя ответ был бы другим.

Ответ.

$$\boxed{A = \frac{pV}{2} = \frac{9}{8}\nu RT}$$

Проверка. Размерность: νRT — энергия. Числа: $\nu_0 = \frac{9}{4}\nu$, пара в конце $\frac{5}{4}\nu$; проверим второе уравнение: $\frac{pV}{2} = \frac{9}{8}\nu RT$ и $\frac{5}{4}\nu R \cdot 0{,}9T = \frac{9}{8}\nu RT$ — совпало. Предел: если бы ничего не сконденсировалось ($\nu = 0$), то $\frac{V/2}{V} = 0{,}9$ — противоречие; объём может упасть сильнее температуры только за счёт конденсации, поэтому $A \propto \nu$.

Смысл: работа над паром измеряется числом сконденсировавшихся молей — чем больше пара стало водой, тем сильнее «провалился» поршень.

Ответ. $A = \frac{9}{8}\nu RT$.