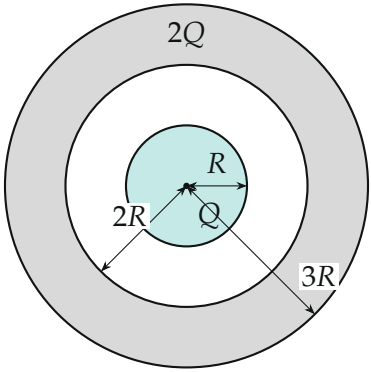
# Заряженный шар внутри полой проводящей сферы

**Задача 3.** [Физтех 2012/13, 11 класс, задача 3] Проводящий шарик радиусом $R$ с зарядом $Q$ имеет потенциал $\varphi_1 = 200$ В. Каким станет потенциал $\varphi_2$ шарика, если он окажется внутри полого проводящего шара с радиусами сферических поверхностей $2R$ и $3R$ и зарядом $2Q$? Центры заряженного шарика и полого шара совпадают.




*Поясняющий рисунок. Шарик с зарядом $Q$ в центре полого проводящего шара с зарядом $2Q$ (сечение).*

▲ **Решение.** **Что происходит.** Задача на проводники и принцип суперпозиции. Внутри металла полого шара поля нет; поэтому на его внутренней поверхности соберётся заряд, гасящий поле шарика, а остаток уйдёт на внешнюю поверхность. Все заряды распределены по концентрическим сферам равномерно, а потенциал в центре (он же потенциал шарика) — сумма потенциалов трёх сфер.

**Обозначения.** $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$; $q_1$, $q_2$ — заряды внутренней (радиус $2R$) и внешней ($3R$) поверхностей полого шара; потенциал на бесконечности равен нулю.

**1. Потенциал одиночного шарика.** Поле вне шарика — как от точечного заряда, поэтому

$$\varphi_1 = k\frac{Q}{R} = 200 \text{ В}.$$

**2. Заряды поверхностей полого шара.** Возьмём сферу Гаусса радиуса $r$ внутри металла ($2R < r < 3R$, рис. 1). Поле в металле равно нулю, значит, по теореме Гаусса заряд внутри сферы равен нулю:

$$Q + q_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad q_1 = -Q.$$

Полный заряд полого шара $2Q$, остальное — на внешней поверхности:

$$q_2 = 2Q - q_1 = 3Q.$$

По симметрии все заряды распределены по сферам равномерно (рис. 1).

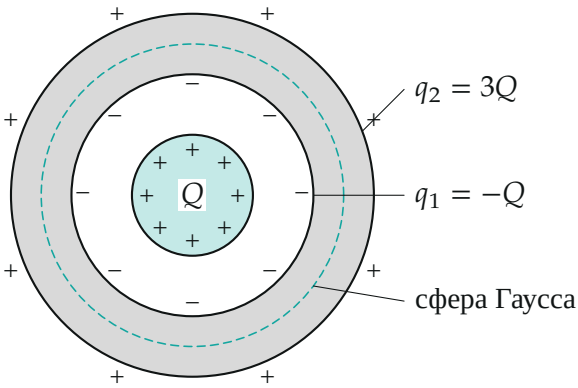



*Рис. 1. Индуцированные заряды: на внутренней поверхности $-Q$, на внешней $3Q$. Пунктир — сфера Гаусса в металле.*

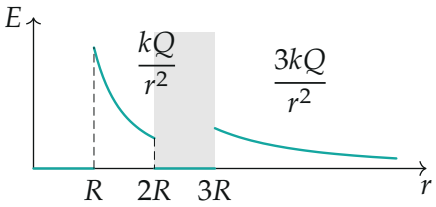



*Рис. 2. Напряжённость поля $E(r)$ (построена по формулам): в шарике и в металле поля нет, между ними — поле одного $Q$, снаружи — поле полного заряда $3Q$.*

**3. Потенциал шарика.** Равномерно заряженная сфера радиуса $a$ с зарядом $q$ создаёт внутри себя постоянный потенциал $kq/a$, а снаружи — как точечный заряд. Шарик находится внутри обеих сфер полого шара, поэтому по принципу суперпозиции

$$\varphi_2 = k\frac{Q}{R} + k\frac{-Q}{2R} + k\frac{3Q}{3R} = k\frac{Q}{R}\left(1 - \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{3}{2}k\frac{Q}{R}.$$

$$\varphi_2 = \frac{3}{2}\varphi_1 = 300\text{ В}.$$

**4. Картина потенциала.** Зависимость $\varphi(r)$ (рис. 3; $E(r)$ — на рис. 2): внутри шарика постоянна (300 В), между шариком и полым шаром убывает как $kQ/r$ плюс постоянная, в металле постоянна, снаружи — $3kQ/r$, как от точечного заряда $3Q$. Потенциал металла полого шара: $k \cdot 3Q/(3R) = kQ/R = 200$ В.

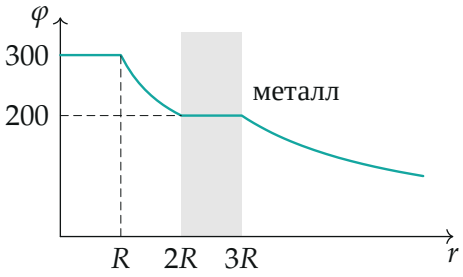



*Рис. 3. Потенциал $\varphi(r)$ в вольтах (построен по формулам); серая полоса — металл полого шара.*

**5. Второй способ — через напряжение.** Потенциал металла полого шара — как у сферы с зарядом $3Q$ радиуса $3R$: $kQ/R = 200$ В. Между шариком и внутренней поверхностью поле создаёт только $Q$, разность потенциалов

$$\varphi_2 - \varphi_\text{м} = kQ\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R}\right) = \frac{1}{2}k\frac{Q}{R} = 100\text{ В},$$

откуда $\varphi_2 = 200 + 100 = 300$ В — совпало.

**Обратите внимание.** Заряд шарика $Q$ не меняется (он изолирован), меняется только его потенциал — из-за зарядов полого шара. Внешняя поверхность несёт $3Q$, а не $2Q$: индуцированные $-Q$ внутри «выталкивают» $+Q$ наружу.

**Ответ.**

$$\boxed{\varphi_2 = \frac{3}{2}\varphi_1 = 300\ \text{В}}$$

**Проверка.** Размерность: $kQ/R$ — вольты. Предел: если бы полый шар был не заряжен, $\varphi_2 = kQ/R(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) = \frac{5}{6}\varphi_1$ — меньше $\varphi_1$: отрицательный индуцированный заряд ближе к шарику, чем положительный; заряд $2Q$ поднимает его на $\frac{2}{3}\varphi_1$: $\frac{5}{6} + \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$ — совпало.

Смысл: потенциал шарика — сумма «своего» $kQ/R$ и постоянных вкладов сфер, внутри которых он находится.

**Ответ.** $\varphi_2 = \frac{3}{2}\varphi_1 = 300$ В.