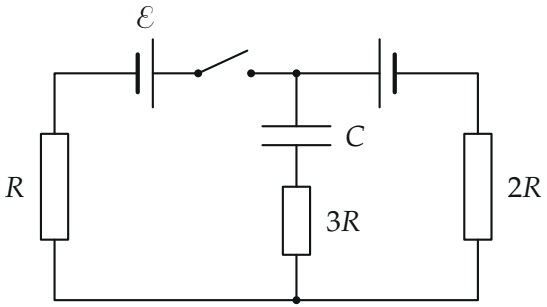
Размыкание ключа: тепло на резисторе

Задача 4. [Физтех 2012/13, 11 класс, задача 4] В схеме, показанной на рисунке, все элементы можно считать идеальными, известные параметры элементов указаны на рисунке, неизвестная ЭДС меньше $\mathcal{E}$. Ключ замыкают и дожидаются установления стационарного режима. Затем ключ размыкают, после чего в схеме выделяется количество теплоты, равное $\frac{2}{9}C\mathcal{E}^2$.



1. Какое количество теплоты выделилось в резисторе $2R$ после размыкания ключа?
2. Найдите силу тока, протекавшего в схеме в стационарном режиме.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на перезарядку конденсатора через источник: работа источника, изменение энергии конденсатора и теплота связаны законом сохранения энергии. При замкнутом ключе ток установился и через конденсатор не идёт — течёт по внешнему контуру $\mathcal{E}$ — $\mathcal{E}_1$ — $2R$ — R. После размыкания остаётся один контур: $\mathcal{E}_1$, конденсатор, $3R$ и $2R$; конденсатор перезаряжается до напряжения $\mathcal{E}_1$, и выделяется заданная теплота. Ток в этом контуре общий для $3R$ и $2R$, поэтому теплота делится между ними пропорционально сопротивлениям.

Обозначения. $\mathcal{E}_1$ — неизвестная ЭДС, I — ток при замкнутом ключе, q_1 и U_1 — заряд верхней обкладки и напряжение конденсатора при замкнутом ключе, $Q = \frac{2}{9}C\mathcal{E}^2$ — выделившаяся теплота. Потенциал нижнего провода — ноль, B — узел над конденсатором.

1. Пункт 1. Деление теплоты. После размыкания $3R$ и $2R$ соединены последовательно, в каждый момент через них идёт один и тот же ток $i(t)$

(рис. 2). По закону Джоуля — Ленца за малое время dt в них выделяются $i^2 \cdot 3R\,dt$ и $i^2 \cdot 2R\,dt$ — всегда в отношении 3 : 2. Суммируя от размыкания до конца перезарядки,

$$Q_{2R} = Q \cdot \frac{2R}{2R+3R} = \frac{2}{9} C\mathcal{E}^2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{45} C\mathcal{E}^2.$$

2. Стационарный режим. У источников «+» обращены к узлу B: $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}_1$ включены в контуре навстречу; $\mathcal{E} > \mathcal{E}_1$, поэтому ток идёт по часовой стрелке (рис. 1). Закон Ома для замкнутого контура:

$$I = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_1}{R + 2R} = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_1}{3R}.$$

Потенциал узла B найдём, пройдя от него через $\mathcal{E}_1$ (от «+» к «−», потенциал падает на $\mathcal{E}_1$) и вниз через $2R$ по току (падает на $2IR$) к нулю:

$$U_1 = \varphi_B = \mathcal{E}_1 + 2IR, \qquad q_1 = C(\mathcal{E}_1 + 2IR).$$

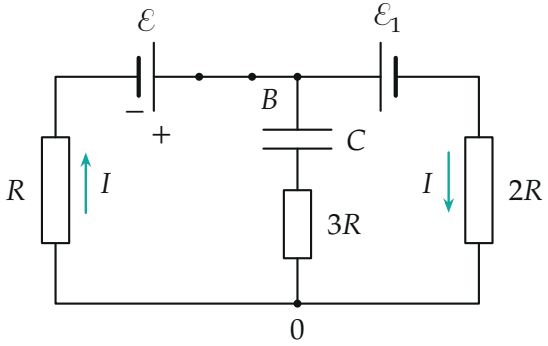


Рис. 1. Ключ замкнут, ток установился: через ветвь с конденсатором тока нет, ток I идёт через R и $2R$.

3. После размыкания. Ток в конце перезарядки прекращается, напряжения на резисторах нулевые, и напряжение конденсатора равно ЭДС единственного оставшегося источника: $U_2 = \mathcal{E}_1$, заряд $C\mathcal{E}_1$. Заряд верхней обкладки уменьшился на $\Delta q = q_1 - C\mathcal{E}_1 = 2CIR$; этот заряд прошёл через источник $\mathcal{E}_1$ от «+» к «−», против его ЭДС (рис. 2).

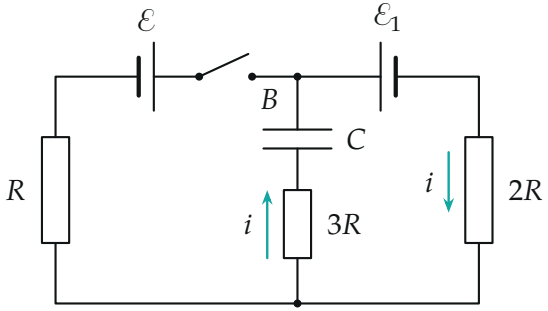


Рис. 2. Ключ разомкнут: конденсатор перезаряжается током i по контуру $\mathcal{E}_1 - 2R - 3R - C$.

4. Пункт 2. Закон сохранения энергии. От размыкания ключа до конца перезарядки работа источника $\mathcal{E}_1$ равна изменению энергии конденсатора плюс теплота:

$$A_{\text{ист}} = \Delta W_C + Q.$$

Работа источника: $A_{\text{ист}} = -\mathcal{E}_1 \Delta q = -2CIR\,\mathcal{E}_1$ (заряд прошёл против ЭДС). Изменение энергии:

$$\Delta W_C = \frac{C\mathcal{E}_1^2}{2} - \frac{C(\mathcal{E}_1 + 2IR)^2}{2} = -2CIR\,\mathcal{E}_1 - 2CI^2R^2.$$

Подставим:

$$-2CIR\,\mathcal{E}_1 = -2CIR\,\mathcal{E}_1 - 2CI^2R^2 + Q \quad \Rightarrow \quad Q = 2CI^2R^2 = \frac{C(2IR)^2}{2}.$$

Теплота — это энергия «скачка» напряжения $\Delta U = 2IR$ (рис. 3), и $\mathcal{E}_1$ сократилась. Отсюда

$$I = \sqrt{\frac{Q}{2CR^2}} = \sqrt{\frac{2C\mathcal{E}^2}{9 \cdot 2CR^2}} = \frac{\mathcal{E}}{3R}.$$

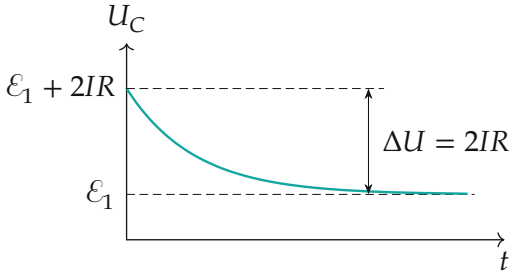


Рис. 3. Напряжение конденсатора после размыкания (экспонента с $\tau = 5RC$): от $\mathcal{E}_1 + 2IR$ до $\mathcal{E}_1$.

Обратите внимание. Теплота не равна убыли энергии конденсатора: часть этой убыли забирает источник $\mathcal{E}_1$ (через него заряд идёт против ЭДС). Именно поэтому в ответ входит только скачок напряжения $2IR$, а не сами напряжения. Заметим также: из закона Ома $I = (\mathcal{E}-\mathcal{E}_1)/(3R) = \mathcal{E}/(3R)$ следует $\mathcal{E}_1 = 0$ — данные условия совместны только при нулевой неизвестной ЭДС; на ответы пунктов это не влияет.

Ответ.

$$Q_{2R} = \frac{2}{5}Q = \frac{4}{45}C\mathcal{E}^2, \qquad I = \sqrt{\frac{Q}{2CR^2}} = \frac{\mathcal{E}}{3R}$$

Проверка. Размерность: $\sqrt{Q/(CR^2)}$ — $\sqrt{\text{Дж}/(\Phi \cdot \text{Ом}^2)} = \text{В}/\text{Ом} = \text{А}$. Второй способ: перезарядка конденсатора через резистор от постоянного источника всегда выделяет $\frac{1}{2}C(\Delta U)^2$; $\frac{1}{2}C\left(\frac{2\mathcal{E}}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}C\mathcal{E}^2$ — совпало с условием.

Смысл: при перезарядке через источник теплота определяется только тем, на сколько скачком «должно» измениться напряжение конденсатора.

Ответ. 1) $Q_{2R} = \frac{4}{45}C\mathcal{E}^2$; 2) $I = \frac{\mathcal{E}}{3R}$.