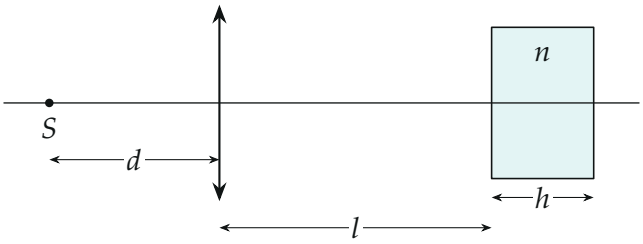
Линза и плоскопараллельная пластина

Задача 5. [Физтех 2012/13, 11 класс, задача 5] Точечный источник находится на главной оптической оси собирающей линзы на расстоянии $d = 15$ см от линзы, его действительное изображение наблюдается на вдвое большем расстоянии. Найдите фокусное расстояние F линзы. Если за линзой перпендикулярно её главной оптической оси поместить плоскопараллельную прозрачную пластину толщиной $h = 9$ см с показателем преломления $n = 1{,}5$, то изображение точечного источника наблюдается на задней поверхности пластины. Найдите расстояние l от линзы до передней поверхности пластины.



Поясняющий рисунок (масштаб по вертикали увеличен). Источник S, линза и пластина за ней.

▲ **Решение. Что происходит.** Первая часть — формула тонкой линзы. Во второй части пластина стоит на пути сходящегося пучка: лучи на её границах преломляются, сходятся к оси медленнее, и изображение отодвигается от линзы. Главная идея: для лучей, близких к оси, пластина сдвигает точку схождения на $h\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ — это сдвиг «кажущейся глубины» наоборот.

Обозначения. $f = 2d = 30$ см — расстояние от линзы до изображения без пластины (S^*), θ — угол луча с осью в воздухе, θ' — в пластине, y — высота луча над осью на передней поверхности пластины.

1. Фокусное расстояние. Изображение действительное, формула тонкой собирающей линзы:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{2d} = \frac{1}{F} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{2}{3}d = 10 \text{ см}.$$

Ход лучей — на рис. 1: каждый луч из S после линзы идёт в S^* (наклоны посчитаны по формуле линзы).

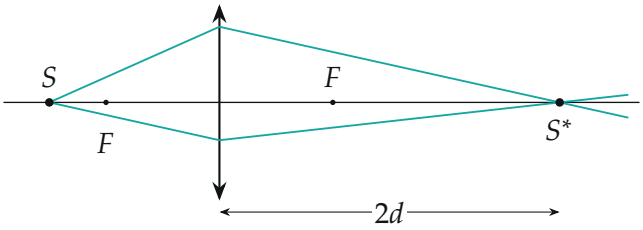


Рис. 1. Без пластины лучи от S сходятся в S^* на расстоянии $2d = 30$ см (лучи посчитаны по формуле линзы).

2. Преломление в пластине. Луч, идущий к S^* под углом θ к оси, на передней поверхности пластины преломляется по закону Снеллиуса $\sin\theta = n\sin\theta'$; для лучей, близких к оси, $\operatorname{tg}\theta \approx \sin\theta$, и $\operatorname{tg}\theta' = \operatorname{tg}\theta/n$. На задней поверхности луч преломится обратно, но изображение по условию ровно на ней — значит, луч приходит к оси внутри пластины. Пусть луч входит в пластину на высоте y. Без пластины он дошёл бы до оси, пройдя по горизонтали $y/\operatorname{tg}\theta$, а в пластине проходит $y/\operatorname{tg}\theta' = n\,y/\operatorname{tg}\theta$ (рис. 2).

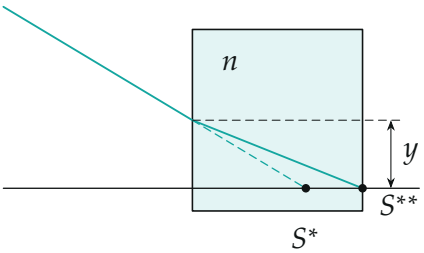


Рис. 2. Луч в пластине идёт к оси положе: вместо S^* (пунктир) он приходит к оси в S^{**} на задней поверхности (углы увеличены; посчитано для $y = 0{,}6$ см).

3. Сдвиг изображения. Сдвиг точки схождения

$$\Delta = \frac{ny}{\operatorname{tg}\theta} - \frac{y}{\operatorname{tg}\theta} = (n-1)\frac{y}{\operatorname{tg}\theta},$$

а $\dfrac{y}{\operatorname{tg}\theta} = 2d - l$ — путь от передней поверхности до S^* в воздухе. Изображение на задней поверхности: от передней поверхности до него h:

$$n(2d-l) = h \quad \Rightarrow \quad 2d - l = \frac{h}{n}, \qquad l = 2d - \frac{h}{n} = 30 - 6 = 24 \text{ см}.$$

То есть S^* «оказался бы» на глубине $h/n = 6$ см внутри пластины, а пластина отодвинула его на $\Delta = h\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 3$ см, к задней поверхности (рис. 3).

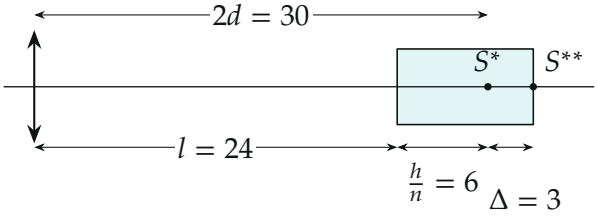


Рис. 3. Расстояния вдоль оси, см: изображение без пластины S^* на 30 см, с пластиной S^{**} на 33 см — на задней поверхности.

Обратите внимание. Пластина сдвигает изображение не на h и не на h/n, а на $h\left(1 - \frac{1}{n}\right)$; формула верна для лучей, близких к оси (тогда изображение точечное).

Ответ.

$$F = \frac{2}{3}d = 10 \text{ см}, \qquad l = 2d - \frac{h}{n} = 24 \text{ см}$$

Проверка. Размерности — сантиметры. Предел: при $n = 1$ пластина ничего не меняет, $l = 2d - h$ — задняя поверхность просто совпадает с S^*; так и выходит. Численно: луч с $y = 0{,}6$ см и $\operatorname{tg}\theta = 0{,}1$ в пластине идёт с $\operatorname{tg}\theta' = 0{,}0667$ и проходит до оси $0{,}6/0{,}0667 = 9$ см $= h$ — совпало.

Смысл: в пластине лучи сходятся медленнее в n раз, и путь к точке схождения внутри неё растягивается в n раз.

Ответ. $F = \dfrac{2}{3}d = 10$ см; $\quad l = 2d - \dfrac{h}{n} = 24$ см.