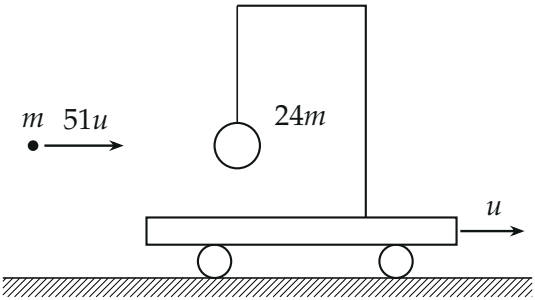
Пуля попадает в шар на тележке

Задача 1. [Физтех 2013/14, 11 класс, задача 1] По горизонтальной поверхности пола движется со скоростью $u = 1$ м/с тележка со штативом, к которому на нити длиной $l = 0{,}5$ м привязан шар (см. рис.). Пуля, летящая горизонтально со скоростью $51u$, попадает в шар и застревает в нём. Массы пули и шара m и $24m$, масса тележки намного больше массы шара. Направления всех движений находятся в одной вертикальной плоскости. Размеры шара малы по сравнению с длиной нити.



1. Найдите скорость шара v_1 относительно тележки сразу после попадания пули.
2. Найдите скорость шара v_2 относительно пола сразу после попадания пули.
3. На какой максимальный угол от вертикали отклонится нить при дальнейших колебаниях шара?

▲ **Решение.** **Что происходит.** Тележка намного массивнее шара: ни удар, ни колебания шара не меняют её скорость u, и система отсчёта тележки инерциальна. В ней шар до удара покоится, пуля налетает со скоростью $51u - u = 50u$ и застревает (неупругий удар — сохраняется импульс). Дальше шар с пулей — маятник на неподвижном подвесе: натяжение нити перпендикулярно скорости и работы не совершает, сохраняется механическая энергия. Задача на переход в другую инерциальную систему отсчёта и законы сохранения импульса и энергии.

Обозначения. Ось x — горизонтально вправо, по скорости тележки. v_1, v_2 — скорость шара с пулей сразу после удара относительно тележки

и пола; α — максимальный угол отклонения нити; h — высота подъёма шара.

Пункт 1. Удар в системе тележки.

1. Скорость пули относительно тележки. Закон сложения скоростей в проекции на ось x: $51u - u = 50u$. Шар в этой системе неподвижен (рис. 1).

2. Закон сохранения импульса системы пуля + шар за время удара. Удар короткий, нить за это время не отклоняется, и её натяжение вертикально — горизонтальных внешних сил нет:

$$m \cdot 50u = (m + 24m)\, v_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 2u = 2 \text{ м/с}.$$

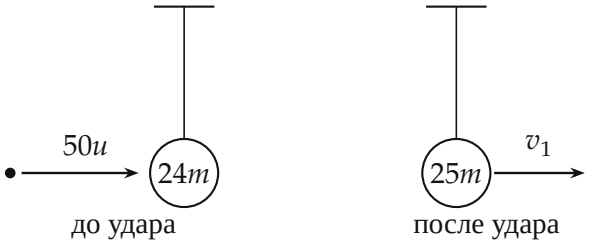


Рис. 1. Удар в системе отсчёта тележки: пуля налетает на покоящийся шар со скоростью $50u$, после удара шар с пулей движется со скоростью $v_1 = 2u$.

Пункт 2. Скорость относительно пола. Закон сложения скоростей (рис. 2): $v_2 = v_1 + u = 3u = 3$ м/с.

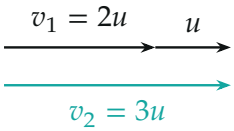


Рис. 2. Скорость шара относительно пола — его скорость относительно тележки плюс скорость тележки.

Пункт 3. Угол отклонения.

3. Закон сохранения механической энергии в системе тележки. Подвес неподвижен, натяжение нити перпендикулярно скорости шара и работы не совершает; работает только сила тяжести. В крайнем положении шар в системе тележки останавливается, поднявшись на $h = l(1 - \cos\alpha)$ (рис. 3):

$$\frac{25m\,v_1^2}{2} = 25m\,g\,l\,(1-\cos\alpha) \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = 1 - \frac{v_1^2}{2gl} = 1 - \frac{2u^2}{gl}.$$

Числа: $\cos\alpha = 1 - \dfrac{2\cdot 1}{9{,}8\cdot 0{,}5} \approx 0{,}59 \approx 0{,}6$, $\alpha \approx 54^\circ$.

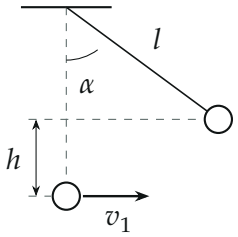


Рис. 3. Колебания в системе тележки: из нижней точки со скоростью v_1 шар поднимается на $h = l(1-\cos\alpha)$ и в крайнем положении останавливается (угол построен по $\cos\alpha = 0{,}59$).

Обратите внимание. Энергию нельзя сохранять в системе пола со скоростью $v_2 = 3u$: там подвес движется и натяжение нити совершает работу. Если всё же так сделать, в крайней точке приходится гасить «лишнюю» скорость, и получается типичный неверный ответ $\cos\alpha = 1 - \dfrac{4u^2}{gl} \approx 0{,}2$.

Ответ.

$$v_1 = 2u = 2\ \text{м/с}, \qquad v_2 = 3u = 3\ \text{м/с}, \qquad \cos\alpha = 1 - \frac{2u^2}{gl} \approx 0{,}6$$

Проверка. Размерность: $\dfrac{u^2}{gl}$ безразмерно. Нить не провисает: $\alpha < 90^\circ$, $h = l(1-\cos\alpha) \approx 0{,}2\,\text{м} < l$, и $v_1^2 = 4 < 2gl \approx 9{,}8\,\text{м}^2/\text{с}^2$. Предел: мед-

ленная пуля ($v_1 \to 0$) — $\cos\alpha \to 1$, отклонения нет. Второй способ для пункта 3 в системе пола: в крайней точке шар движется со скоростью тележки u; шар отдал тележке импульс $25m(3u - u) = 50mu$, тележка со скоростью u получила работу $50mu^2$, а натяжение нити совершило над шаром работу $-50mu^2$ (нить нерастяжима, суммарная работа натяжения ноль); тогда $\frac{25m}{2}(9u^2 - u^2) - 50mu^2 = 25mgh$ даёт $gh = 2u^2$ — то же.

Смысл: в системе тележки это обычный маятник, получивший толчок $2u$; движение тележки на угол не влияет.

Ответ. 1) $v_1 = 2u = 2$ м/с; 2) $v_2 = 3u = 3$ м/с; 3) $\cos\alpha = 1 - \dfrac{2u^2}{gl} \approx 0{,}6$ ($\alpha \approx 54^\circ$).