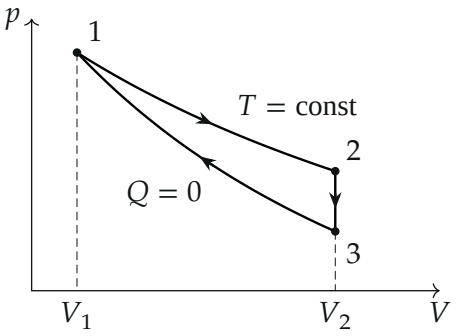
Цикл идеального газа с адиабатой

Задача 2. [Физтех 2013/14, 11 класс, задача 2] Идеальный газ совершает цикл, состоящий из изотермического расширения, изохорического охлаждения и адиабатического сжатия. Работа газа при расширении в 10 раз больше работы газа за цикл.

1. Во сколько раз работа газа при расширении больше работы над газом при сжатии?
2. Найдите КПД цикла.



Поясняющий рисунок. Цикл $1 \to 2 \to 3 \to 1$ *на* pV*-диаграмме (кривые посчитаны для одноатомного газа; на ответ вид газа не влияет).*

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на первое начало термодинамики для цикла. Газ расширяется изотермически ($1 \to 2$), остывает при постоянном объёме ($2 \to 3$) и адиабатически сжимается обратно в состояние 1. Работа за цикл — алгебраическая сумма работ на трёх участках, а КПД — отношение этой работы к теплоте, которую газ *получил*. Главная идея: на каждом участке один из членов первого начала равен нулю, и по знакам сразу видно, где газ получает тепло.

Обозначения. A_{12}, A_{23}, A_{31} — работы газа на участках, A — работа газа за цикл, Q_{12}, Q_{23}, Q_{31} — теплоты, полученные газом, ΔU — изменение внутренней энергии.

1. Работы на участках. Работа газа — площадь под графиком $p(V)$ со знаком: при расширении она положительна, при сжатии отрицательна.

- $1 \to 2$ — расширение: $A_{12} > 0$ (рис. 1);
- $2 \to 3$ — объём не меняется: $A_{23} = 0$;
- $3 \to 1$ — сжатие: $A_{31} < 0$, работа газа отрицательна, над газом совершают работу $|A_{31}|$ (рис. 2).

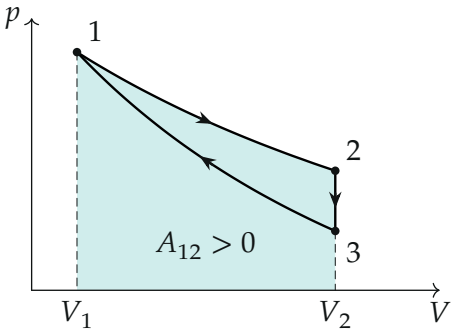


Рис. 1. Работа газа при изотермическом расширении — площадь под изотермой.

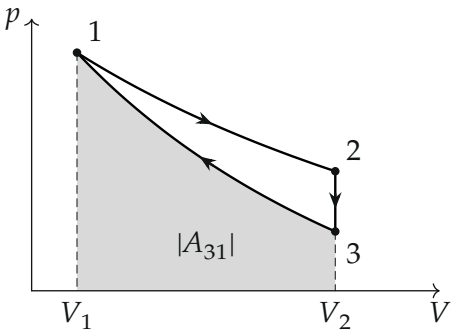


Рис. 2. Работа над газом при адиабатическом сжатии — площадь под адиабатой.

2. Пункт 1. Работа газа за цикл

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{31} = A_{12} - |A_{31}|.$$

По условию $A_{12} = 10A$, поэтому $|A_{31}| = A_{12} - A = 10A - A = 9A$ и

$$\frac{A_{12}}{|A_{31}|} = \frac{10A}{9A} = \frac{10}{9}.$$

На рисунке это видно так: площадь цикла (рис. 3) — разность площадей рис. 1 и рис. 2, она составляет десятую часть площади под изотермой.

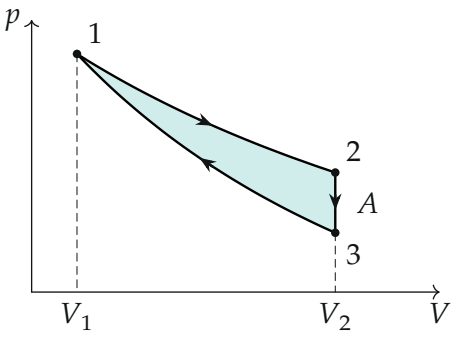


Рис. 3. Работа газа за цикл — площадь внутри цикла; обход по часовой стрелке, поэтому $A > 0$.

3. Где газ получает тепло. Запишем первое начало термодинамики $Q = \Delta U + A_{\text{газа}}$ для каждого участка.

- $1 \to 2$, изотерма: внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры, $\Delta U_{12} = 0$, поэтому $Q_{12} = A_{12} > 0$ — газ получает тепло;
- $2 \to 3$, изохора: $A_{23} = 0$, газ остывает, $\Delta U_{23} < 0$, поэтому $Q_{23} = \Delta U_{23} < 0$ — газ отдаёт тепло;
- $3 \to 1$, адиабата: $Q_{31} = 0$ по определению.

Значит, полученная за цикл теплота — только Q_{12}.

4. Пункт 2. КПД. По определению КПД — работа за цикл, делённая на полученную теплоту:

$$\eta = \frac{A}{Q_{12}} = \frac{A}{A_{12}} = \frac{A}{10A} = \frac{1}{10}.$$

Обратите внимание. В знаменателе КПД — только *полученная* теплота Q_{12}, а не сумма модулей всех теплот и не $Q_{12}+Q_{23}$. Отданное на изохоре тепло $|Q_{23}| = Q_{12} - A = 9A$ — это потери, оно в знаменатель не входит.

Ответ.

$$\frac{A_{12}}{|A_{31}|} = \frac{10}{9}, \qquad \eta = \frac{A}{Q_{12}} = \frac{1}{10} = 10\,\%$$

Проверка. Баланс энергии за цикл: $Q_{12} + Q_{23} = 10A - 9A = A$ — вся полученная теплота, кроме отданной, ушла в работу, как и должно быть при $\Delta U_{\text{цикл}} = 0$. Второй способ для КПД: $\eta = 1 - |Q_{23}|/Q_{12} = 1 - 9/10 = 1/10$. Для одноатомного газа такой цикл реализуется при $V_2/V_1 \approx 1{,}38$ (рис. 1–3 построены именно так): там $\nu R T_1 \ln 1{,}38 \approx 0{,}322\,\nu R T_1$, а $\frac{3}{2}\nu R(T_1 - T_3) \approx 0{,}290\,\nu R T_1$, отношение $10/9$.

Смысл: изотерма даёт всё тепло, а адиабата забирает обратно $9/10$ работы расширения — поэтому и КПД всего 10 %.

Ответ. 1) в $10/9$ раза; 2) $\eta = 1/10 = 10\,\%$.