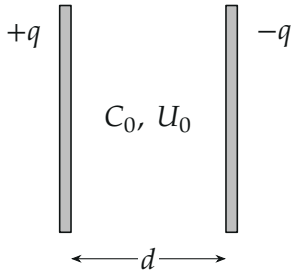
Сила притяжения обкладок и работа раздвигания

Задача 3. [Физтех 2013/14, 11 класс, задача 3] Плоский воздушный конденсатор ёмкостью C_0 и расстоянием между обкладками d заряжен до напряжения U_0 и отсоединён от источника.

1. Найдите силу притяжения обкладок.
2. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы увеличить расстояние между обкладками на $\frac{d}{3}$?



Поясняющий рисунок. Заряженный конденсатор отключён от источника: заряд q на обкладках больше не меняется.

▲ **Решение. Что происходит.** Конденсатор отключён от источника, поэтому при раздвигании обкладок заряд q на них сохраняется. Сила притяжения обкладок — сила, с которой поле *одной* обкладки действует на заряд *другой*. Поле бесконечной пластины от расстояния до неё не зависит, значит, сила при раздвигании постоянна, и минимальная работа — просто сила на перемещение. Минимальная — значит, обкладку двигают медленно, без разгона: внешняя сила в каждый момент уравновешивает притяжение.

Обозначения. $q = C_0U_0$ — заряд обкладки, E — поле внутри конденсатора, E_1 — поле одной обкладки, S — площадь обкладки, F — сила притяжения, A — искомая работа.

1. Поле одной обкладки. Поле внутри конденсатора $E = U_0/d$ создают *обе* обкладки: каждая даёт поле E_1, направленное от $+q$ к $-q$, и

между обкладками эти поля складываются (рис. 1):

$$E = 2E_1 \quad \Rightarrow \quad E_1 = \frac{E}{2} = \frac{U_0}{2d}.$$

Снаружи поля обкладок направлены противоположно и гасят друг друга.

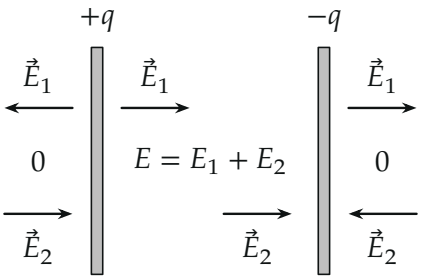


Рис. 1. Поля обкладок ($E_1 = E_2$): внутри складываются, снаружи гасят друг друга.

2. Пункт 1. Сила притяжения. На заряд $-q$ правой обкладки действует только поле левой обкладки E_1 (своё поле на себя не действует). Сила

$$F = qE_1 = C_0U_0 \cdot \frac{U_0}{2d} = \frac{C_0U_0^2}{2d},$$

направлена к левой обкладке — обкладки притягиваются (рис. 2).

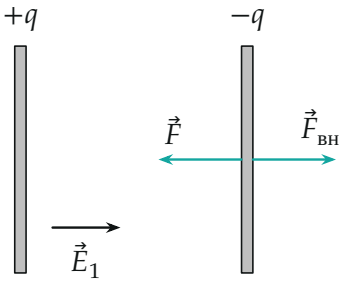


Рис. 2. Силы, действующие на правую обкладку при медленном раздвигании: притяжение $\vec{F}$ и внешняя сила $\vec{F}_{вн}$.

3. Пункт 2. Минимальная работа. Двигаем правую обкладку медленно: её ускорение равно нулю, и по второму закону Ньютона для обкладки в проекции на направление движения $F_{\text{вн}} - F = 0$, то есть $F_{\text{вн}} = F$. Заряд q не меняется (источник отключён), поле $E_1 = q/(2\varepsilon_0 S)$ от расстояния не зависит — значит, и F на всём пути одна и та же. Работа постоянной силы на перемещении $d/3$ — площадь прямоугольника под графиком $F_{\text{вн}}(x)$ (рис. 3):

$$A = F \cdot \frac{d}{3} = \frac{C_0 U_0^2}{2d} \cdot \frac{d}{3} = \frac{C_0 U_0^2}{6}.$$

Работа минимальна: при большей внешней силе обкладка разгонялась бы, и часть работы ушла бы в кинетическую энергию.

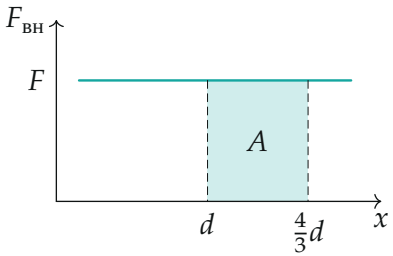


Рис. 3. Внешняя сила постоянна; работа — площадь прямоугольника.

4. Второй способ — через энергию. Медленное раздвигание: работа внешней силы целиком идёт в энергию конденсатора, $A = W_2 - W_1$. При постоянном заряде удобна формула $W = q^2/(2C)$. Ёмкость плоского конденсатора $C = \varepsilon_0 S/x$ обратно пропорциональна расстоянию: при $x = \frac{4}{3}d$ ёмкость $C = \frac{3}{4}C_0$, энергия растёт в $\frac{4}{3}$ раза:

$$A = \frac{q^2}{2C_0}\left(\frac{4}{3} - 1\right) = \frac{C_0 U_0^2}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{C_0 U_0^2}{6}.$$

Ответ тот же. Отсюда же и сила: $W = \dfrac{q^2 x}{2\varepsilon_0 S}$ растёт линейно по x, $F = \dfrac{dW}{dx} = \dfrac{q^2}{2\varepsilon_0 S} = \dfrac{W_1}{d} = \dfrac{C_0 U_0^2}{2d}$.

Обратите внимание. Сила притяжения — не qE, а $qE/2$: на заряд обкладки действует поле только другой обкладки, а $E = U_0/d$ — суммарное поле обеих.

Ответ.

$$\boxed{F = \frac{C_0 U_0^2}{2d}, \qquad A = \frac{C_0 U_0^2}{6}}$$

Проверка. Размерность: $C_0 U_0^2$ — энергия (джоуль), делённая на длину — сила. Энергия и сила совпали двумя способами (через поле и через $W(x)$). Если бы источник оставался подключён ($U = \text{const}$), сила убывала бы при раздвигании — постоянство F здесь именно от сохранения заряда.

Смысл: пока заряд не меняется, раздвигание обкладок — как подъём груза при постоянной силе тяжести: работа растёт линейно с расстоянием и запасается в энергии поля.

Ответ. 1) $F = \dfrac{C_0 U_0^2}{2d}$; 2) $A = \dfrac{C_0 U_0^2}{6}$.